DIFFERENTIAL EQUATIONS

DIFFERENTIAL EQUATIONS

美国大学课程微分方程

作者：梁梓涵
Author: Zihan Liang

介绍常微分方程 Introduction to Ordinary Differential Equation

一些定义 Some Definitions

常微分方程 Ordinary Differential Equation: An ordinary differential equation (ODE) is an equation that contains one or more derivatives of an unknown function $y = y\ (x)$.

方程的次数 Order of the Equation: The order of the equation is the maximum order of the derivatives appearing in the equation.

方程的解 Solution of the Equation: A solution of a differential equation is a function y that satisfies the equation.

齐次方程与非齐次方程 Homogeneous VS Non-homogeneous Linear ODE: if $f(x) = 0$, then the ODE is said to be homogeneous; otherwise, it is nonhomogeneous.

平凡解与非平凡解 Trivial VS Non-trivial solution: $y = 0$ is a trivial solution of the homogeneous problem. Any other solution will be nontrivial.

微积分 I 和 II 知识回顾 Review of Calculus I and II

微分运算 Differentiation Operation

1. 基础运算法则 Basic Arithmetic Rules

$$Power\ rule\ \frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

$$Product\ rule\ \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$Quotient\ rule\ \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x) \qquad \frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

2. 三角运算法则 Trigonometric Rules

$$\frac{d}{dx}[sinx] = cosx \qquad \frac{d}{dx}[cosx] = -sinx$$

$$\frac{d}{dx}[tanx] = sec^2x \qquad \frac{d}{dx}[cotx] = -csc^2x$$

$$\frac{d}{dx}[secx] = secxtanx \qquad \frac{d}{dx}[cscx] = -cscxcotx$$

3. 指对数法则 Exponential and Logarithmic Rules

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x lna \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}log_a^x = \frac{1}{xlna} \qquad \frac{d}{dx}lnx = \frac{1}{x}$$

4. 链式法则 Chain Rule

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \times g'(x)$$

复合函数求导，需对复合函数先求导，再对**复合部分单独求导**

利用导数分析函数 Analyzing Functions Using Derivatives

5. 临界点 Critical Points
   a. Step 1: 对函数$f(x)$求导。
   b. Step 2: 若$f'(x)$为分式，则分子分母同时为 0，求得x的值。若为整式，则整式为 0，求得x的值。
   $f'(x) = 0$ or $f'(c)$ is undefined, but $f(c)$ is defined — critical points
6. 绝对极值 Absolute Extrema
   a. Step 1: find critical points.
   b. Step 2: find endpoints of the domain.
   c. Step 3: candidate test
   把 critical points 和 endpoints 带入函数，求得每个点对应的y值。最大y值为 absolute maximum，最小y值为 absolute minimum。
7. 增减性 Increasing or Decreasing
   a. Step 1: Draw the image of the first-order derivative function. 穿针引线
   b. Step 2: Judged by the interval positive and negative. 根据区间正负判断
   $f'(x) > 0$ — $f(x)$ is increasing on (a, b)
   $f'(x) < 0$ — $f(x)$ is decreasing on (a, b)
8. 局部极值 Local Extrema
   关键特征：函数增减改变之处；一阶导正负改变之处。
   a. Method 1: First Derivative Test
      i. Step 1: Find critical points c
      ii. Step 2: Draw the image of the first-order derivative function.穿针引线
      iii. Step 3: Judging from the trend of positive and negative image changes.
      $f'(x)$ changes from positive to negative at c — $f(c)$ is a local maximum.
      $f'(x)$ changes from negative to positive at c — $f(c)$ is a local minimum.
   b. Method 2: Second Derivative Test
      i. $f'(c) = 0, f''(c) > 0$ — $f(c)$ is a local minimum.
      ii. $f'(c) = 0, f''(c) < 0$ — $f(c)$ is a local maximum.
      iii. $f'(c) = 0, f''(c) = 0$ — test fails and use the First Derivative Test.
9. 凹性 Concavity
   a. 分类 Classification
      i. Concave up: U 朝上，曲线位于曲线上任意一点处的切线上方。
      concave up on the Interval if $f'(x)$ is increasing on I — $f''(x) > 0$ on I

ii. Concave down: U 朝下，曲线位于曲线上任意一点处的切线下方。concave down on the interval if $f'(x)$ is decreasing on I — $f''(x) < 0$ on I

b. 确定函数的凹度 The Concavity of the Function

i. Step 1: Draw the image of the second-order derivative function. 穿针引线

ii. Step 2: Judged by the interval positive and negative. 根据区间正负判断
$f''(x)$ is positive on this interval — $f(x)$ is concave up
$f''(x)$ is negative on this interval — $f(x)$ is concave down

10. 拐点 Inflection Points

关键特征：函数凹性改变之处; 一阶导增减改变之处; 二阶导正负改变之处。

a. Step 1: $f''(x) = 0$ or $f''(c)$ is undefined but $f(c)$ is defined

b. Step 2: Draw the image of the second-order derivative function. 穿针引线

c. Step 3: Judging from the trend of positive and negative image changes. 根据图像正负变化趋势判断
$f''(x)$ changes from positive to negative at c — $f(x)$ has an inflection point at $x = c$
$f''(x)$ changes from negative to positive at c — $f(x)$ has an inflection point at $x = c$

不定积分计算 Indefinite Integral Operation

11. 基础运算法则 Basic Arithmetic Rules

$$\int 0\,dx = c \quad \int kdx = kx + c \quad \int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

12. 幂运算 Power Rules

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \int \frac{1}{x} = \ln|x| + c$$

13. 三角运算 Trigonometric Rules

$$\int sindx = -cosx + c \quad \int cosdx = sinx + c$$

$$\int sec^2dx = tanx + c \quad \int csc^2dx = -cotx + c$$

$$\int secx\,tanxdx = secx + c \quad \int cscx\,cotxdx = -cscx + c$$

14. 指数运算 Exponential Rules

$$\int e^x dx = e^x + c \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + c$$

15. U 替换解不定积分 U-Substitution

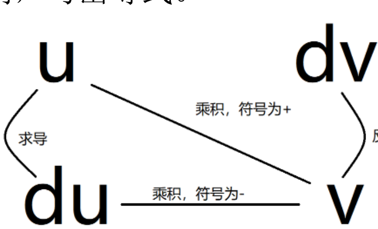
a. 条件 Condition

被积函数可以写成“复合（复合函数）×内导（复合部分的导数）”的形式

b. 步骤 Steps
    i. Step 1: 设复合函数的复合部分为 u，写出 du（u 的导数）。
    ii. Step 2: 把 u 与 du 代入原方程，du 可以写成“系数×du”的形式。原方程变为对 u 的积分。
    iii. Step 3: 算出积分答案（代 u 的式子）。
    iv. Step 4: 把 u 带入答案，得出结果。

16. 部分分式积分 Partial Fractions
    a. 条件 Conditions
        i. 分母要能分解成几个不同的线性表达式。
        ii. 分子最高次幂为小于分母最高次幂（为真分式）。
    b. 步骤 Steps
        i. Step 1: 证明不能用 u 替换。
        ii. Step 2: 利用十字相乘法分解分母的因式。
        iii. Step 3: 把被积函数分开，原被积函数分母的每个项分别为每个部分分式的分母。每个部分分式的分子设为 A, B, C……。
        iv. Step 4: 求解 ABC
        原被积函数=每个部分分式之和；
        每项同时乘原被积函数分母（通分）；
        带入原被积函数分母的根，求出 A, B, C。
        v. Step 5: 带入 A, B, C 到原方程，利用不定积分的线性展开求解。

17. 分部积分 Integration by Parts
    a. 条件 Condition: 被积函数必须为“代数函数×超越函数”。
    b. 步骤 Steps
        i. Step 1: 设出 u 与 dv。
        ii. Step 2: 利用如下法则，写出等式。



$$\int udv = uv - \int vdu$$

        iii. Step 3: 带回 u, v，求解。
    c. 设 u&dv（dv 均为被积函数剩下全部）How to Set u and dv
        i. x 或 x^n 与 ln x 的乘积，设 u=ln x。
        ii. x 与 sinx, cosx 的乘积，设 u=x。

iii. x 与 ex 的乘积，设 u=x。

18. 其他常考定理 Other Frequently Examined Theorems

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln|f(x)| + c$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

第一单元 一阶常微分方程 Chapter 1 First-Order Ordinary Differential Equation

一阶常微分方程 First-Order Ordinary Differential Equation

1. 一阶常微分方程分类 Classification of First-Order ODE
   a. 根据线性与非线性分类 Linearity vs. Non-Linearity
      i. 一阶线性常微分方程 First-order linear ODE: $y' + p(x)y = f(x)$
      ii. 一阶非线性常微分方程 First-order non-linear ODE: other form
   b. 根据齐次和非齐次分类 Homogeneous vs. Nonhomogeneous ODE
      i. 齐次一阶线性常微分方程 First-order linear homogeneous ODE: if $f(x) = 0$, $y' + p(x)y = 0$ is the first-order linear homogeneous ODE.
      ii. 非齐次常微分方程 Nonhomogeneous ODE: ODE that are not exactly zero on the right-hand side of the equation.

一阶线性常微分方程 First-Order Linear Ordinary Differential Equation

2. 一阶线性常微分方程计算 Calculation of First-Order Linear ODE
   a. 前提条件 Precondition: if $p(x)$ and $f(x)$ are continuous on (a,b), we can use the following method to calculate the solution of the ODE.
   b. 齐次一阶线性常微分方程的通解 General Solution of the First-Order Linear Homogeneous ODE
   $$y = ce^{-\int p(x)dx}$$
   c. 非齐次一阶线性常微分方程的通解 General Solution of the First-Order Linear Non-homogeneous ODE
      i. 积分因子法 Integrating Factor Method
      $$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)f(x)\,dx + c\right] \; with \; \mu(x) = e^{+\int p(x)dx}$$
      ii. 常数变易法 Variation of Parameters Method
      $$y(x) = y_1(x)\left[\int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx + c\right] with \; y_1(x) = e^{-\int p(x)dx}$$
3. 一阶线性常微分方程的解的存在唯一性定理 Existence and Uniqueness Theorem for First-Order Linear ODEs
   a. 存在性定理 Existence Theorem: suppose the functions $f(x)$ and $g(x)$ are continuous on an open interval (a,b), there must **exist at least one solution**.
   b. 唯一性定理 Uniqueness Theorem: suppose the functions $f(x)$ and $g(x)$ are continuous on an open interval (a,b), in the IVP, if the Initial Condition (IC) provided, the differential equation has **one and only one unique solution**.
4. 一阶线性常微分方程有效区间判断 Interval of Validity for First-Order Linear ODE
   线性常微分方程的有效区间直接判断$p(x)$和$f(x)$的函数定义域即可，$y \in \mathbb{R}$。

一阶非线性常微分方程 First-Order Non-Linear Ordinary Differential Equation

5. 可分离变量的常微分方程 Separable ODE
   a. 如何求解 How to Solve Separable ODE
      i. Step 1: 把 y'变成 dy/dx。
      ii. Step 2: 含 y 项的内容（包括 dy） 放左边，含 x 项的内容（包括 dx）放右边 $f(y)dy = f(x)dx$。
      iii. Step 3: 两边同时求不定积分，只在右边加 c，得到通解 General Solution。
   b. 自治微分方程——特殊的可分离变量的常微分方程 Autonomous ODE
      i. 形式 Form

$$y' = f(y), y = y(t)$$

      ii. 求解方法 Solution Methods: 运用普通的可分离变量的微分方程求解方法求解，把所有含 y 项的内容（包括 dy） 放左边，把右边的内容留空，写上$\int 1dx$求解。
      iii. 例子 Example

$$y' = \sqrt[3]{y}$$

$$\int y^{-\frac{1}{3}}dy = \int 1dx + C$$

$$\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = x + C$$

$$y = \pm(\frac{2}{3}x + C)^{\frac{3}{2}}$$

6. 不可分离变量的常微分方程——一阶恰当微分方程 Non-Separable ODE — Exact Differential Equation
   a. 形式 Form
      i. $M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$
      ii. $M(x,y)\frac{dx}{dy} + N(x,y) = 0$
      iii. $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$
   b. 恰当微分方程的构成条件 Compositional Conditions for Exact ODE
      Assume $M(x,y), N(x,y)$ are continuous on $\mathbb{R}$ with continuous partial derivatives $M_y(x,y), N_x(x,y)$. Then the equation $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ is called exact if and only if $M_y(x,y) = N_x(x,y)$.
   c. 如何求解恰当微分方程 How to Solve Exact ODE

$$example: (4x^3y^3 + 3x^2)dx + (3x^4y^2 + 6y^2)dy = 0$$

      i. Step 1: 写出$M(x,y), N(x,y)$。

$$M(x,y) = 4x^3y^3 + 3x^2 = F_x$$

$$N(x,y) = 3x^4y^2 + 6y^2 = F_y$$

ii. Step 2: 求解$M_y(x,y), N_x(x,y)$以判断是否为恰当微分方程。

$$M_y(x,y) = N_x(x,y) = 12x^3y^2$$

iii. Step 3: 仅针对$M(x,y)$或$N(x,y)$求积找原函数，并在后缀加上一个未知函数。如果选择$M(x,y)$，则是对x求积，并加上未知函数$\varphi(y)$；如果选择$N(x,y)$，则是对y求积，并加上未知函数$\psi(x)$。
在本例中，选择$M(x,y)$。

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \varphi(y)$$

$$F(x,y) = \int 4x^3y^3 + 3x^2\,dx + \varphi(y) = x^4y^3 + x^3 + \varphi(y)$$

iv. Step 4: 求上述计算结果$F(x,y)$的偏微分。如果之前选择了$M(x,y)$，则对y求偏微分；如果之前选择了$N(x,y)$，则对x求偏微分。

$$F_y(x,y) = 3x^4y^2 + \varphi'(y)$$

v. Step 5: 将计算结果与最初的F_x即$M(x,y)$或F_y即$N(x,y)$进行比较，得出未知函数的导函数。对哪个未知数求的偏微分，就和哪个未知数对应的方程比较：比如上一步求解了$F_y(x,y)$，就与F_y即$N(x,y)$比较，得出$\varphi'(y)$。

$$F_y(x,y) = 3x^4y^2 + \varphi'(y) = 3x^4y^2 + 6y^2 = F_y = N(x,y)$$

$$\varphi'(y) = 6y^2$$

vi. Step 6: 通过积分求解未知函数。

$$\varphi(y) = \int 6y^2\,dy = 2y^3 + C$$

vii. Step 7: 求解答案。

$$F(x,y) = x^4y^3 + x^3 + 2y^3 = C$$

viii. 如果在本例中选择$N(x,y)$。
Step 3: $F(x,y) = \int N(x,y)\,dy + \psi(x) = \int 3x^4y^2 + 6y^2\,dx + \psi(x) = x^4y^3 + 2y^3 + \psi(x)$
Step 4 & 5: $F_x(x,y) = 4x^3y^3 + \psi'(x) = 4x^3y^3 + 3x^2 = F_x = M(x,y)$
Step 6: $\psi'(x) = 3x^2 \quad \psi(x) = x^3 + C$
Step 7: $F(x,y) = x^4y^3 + x^3 + 2y^3 = C$

d. 积分因子法凑成恰当微分方程 Integrating Factor Method to Create Exact ODE

i. 当原方程不满足恰当微分方程的构成条件时，可以使用积分因子法 Integrating Factor Method 凑成恰当微分方程。其原理在于给原方程的每一项乘以积分因子 Integrating Factor。

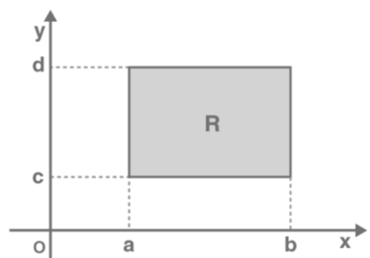
$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \; is \; exact$$

ii. 积分因子 Integrating Factor 的公式有两个，分别是关于x的函数和关于y的函数。

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} \quad \mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$$

具体选择哪一个积分因子 Integrating Factor，需要根据题目而定，哪一个被积函数更容易求积分，就选择哪一个积分因子。

7. 一阶非线性常微分方程的恒定解 Constant Solution of First-Order Non-Linear ODE
   a. 恒定解 Constant Solution 是当$y' = 0$时 y 的值。求解恒定解 Constant Solution 的目的在于帮助我们给予最后的通解 General Solution 完善y的范围。
   b. 在求解恒定解 Constant Solution 后，需要在求解通解 General Solution 之前，假设y不等于恒定解 Constant Solution。
8. 一阶非线性常微分方程的解的存在唯一性定理 Existence and Uniqueness Theorem for First-Order Non-Linear ODE



An open rectangle

   a. 存在性定理 Existence Theorem: if f is continuous on an open rectangle $R = \{a < x < b, c < y < d\}$ that contains (x_0, y_0), then the IVP $\begin{cases} y' = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ has at least 1 solution on some open subinterval of (a, b) that contains x_0.
   b. 唯一性定理 Uniqueness Theorem: if both f and f_y are continuous on R, then the IVP has a unique solution on some open subinterval if (a, b) that contains x_0.
   c. 存在唯一性定理的应用 Applications of Existence and Uniqueness Theorem
      i. 求通解 Finding the General Solution
      Step 1: 找到恒定解 Constant Solution。
      Step 2: 通过存在性定理 Existence Theorem 判断存在性（如果需要有效区间判断 Interval of Validity）。
      Step 3: 求解通解 General Solution。
      ii. 求特解 Finding the Particular Solution
      Step 1: 用上述步骤寻找通解 General Solution。
      Step 2: 把初值 Initial Condition 带入微分方程，如果无解则判断特解不存在 Particular Solution DNE。
      Step 3: 若不是无解，则根据解的存在唯一性定理 Existence and Uniqueness Theorem 判断 Existence 范围（原微分方程f中x和y的取值

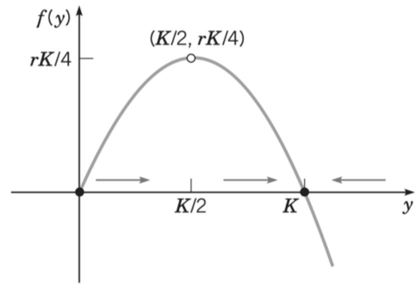
范围）和 Uniqueness 范围（原微分方程的偏微分f_y中x和y的取值范围）。

Step 4: 看初值 Initial Condition 是否同时在两个区间里，如果都在，则满足唯一性 Uniqueness；如果只在 Existence 范围则满足存在性 Existence。

自治微分方程的四种模型 Four Models for Autonomous Differential Equations

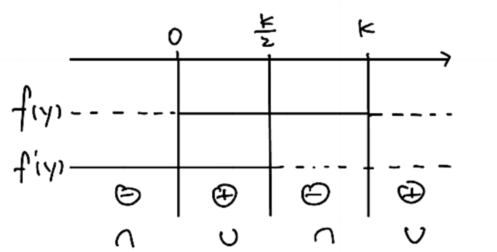
9. 自治微分方程的形式 Form of Autonomous Differential Equation
    a. 定义 Definition: An important class of first-order equations consists of those in which the independent variable does not appear explicitly. Such equations are called autonomous and have the form.
    $$\frac{dy}{dt} = y' = f(y)$$
    b. 自治微分方程的四种模型 Four Models for Autonomous ODE
        i. 指数增长或下降 Exponential Growth or Decline
        ii. 逻辑斯谛增长 Logistic Growth
        iii. 临界阈值 A Critical Threshold
        iv. 带有阈值的逻辑斯谛增长 Logistic Growth with a Threshold
10. 指数增长或下降 Exponential Growth or Decline
    a. 微分方程 Differential Equation
    $$y' = ry \quad y(0) = y_0$$
    where the constant of proportionality r is called the rate of growth or decline, depending on whether r is positive or negative.
    b. 根据 r 变化的三种情况 Three Cases Based on r Change
    Let $f(y) = y'$,
        i. When $r = 0$, $f(y) = 0$ and $y = 0$ is a constant solution.
        ii. When $r > 0$, $f(y) > 0$ and $y(t)$ is increasing.
        iii. When $r < 0$, $f(y) < 0$ and $y(t)$ is decreasing.
11. 逻辑斯谛增长 Logistic Growth
    a. 微分方程 Differential Equation
    $$f(y) = y' = r\left(1 - \frac{y}{k}\right)y$$
    where the constant of proportionality r is called the rate of growth or decline, the y is called population at time t and the k is limiting or carrying capacity (max size of population).
    b. 判断$f(y)$与y之间的图像 Determining the Graph between $f(y)$ and y
        i. Step 1: 判断零点 Zeros，即当$f(y) = 0$时，y的值。并根据零点在(y)与y的图像中标出。在本例中，当$f(y) = 0$时，$y = 0$ & k。

ii. Step 2: 根据零点 Zeros 和$f(y)$解析式，判断在零点 Zeros 左右的正负性，并画出$f(y)$与y之间的图像。



c. 判断y与t之间的图像 Determining the Graph between y and t

i. Step 1: 根据$f(y)$与y的图像和$f(y)$在零点 Zeros 左右的正负性，得出$f(y)$的一阶导$f'(y)$的正负性。

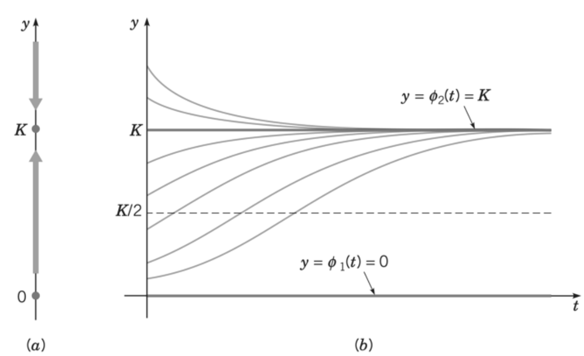


由于画y与t之间的图像需要知道函数的凹度 Concavity，因此需要通过原函数的二阶导的正负性来判断：若二阶导为正，则为 Concave up；若二阶导为负，则为 Concave down。

在这里，我们设$f(y) = y'$，则$y'' = f(y) \times f'(y)$。因此在上述的图中，我们需要通过将$f(y)$的正负性与$f'(y)$的正负性相乘得出原函数的二阶导的正负性。

ii. Step 2: 通过上图来写出相线 Phase Line。第一步是在相线 Phase Line 上标出之前得到的零点 Zeros（从下到上，从小到大）。根据$f(y)$的正负性，若$f(y)$为正，则箭头向上；若$f(y)$为负，则箭头向下。

iii. Step 3: 通过相线 Phase Line 和函数的凹度 Concavity 画出$f(y)$与y之间的图像。



12. 临界阈值 A Critical Threshold

a. 微分方程 Differential Equation

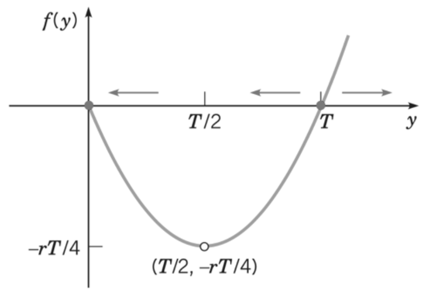
$$f(y) = y' = -r\left(1 - \frac{y}{T}\right)y$$

where r and T are given positive constants.

b. 判断$f(y)$与y之间的图像 Determining the Graph between $f(y)$ and y

i. 判断方法 Method: 与之前保持一致。

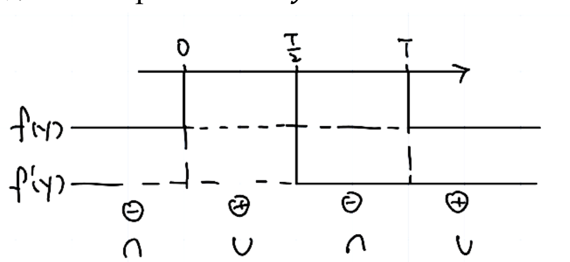
ii. $f(y)$与y之间的图像 the Graph between $f(y)$ and y

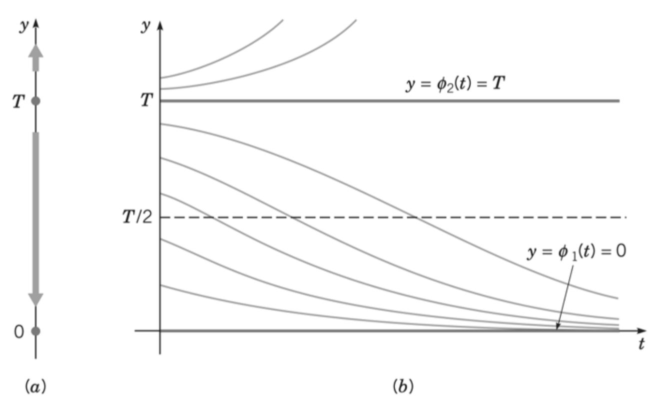


c. 判断y与t之间的图像 Determining the Graph between y and t

i. 判断方法 Method: 与之前保持一致。

ii. y与t之间的图像 the Graph between y and t





13. 带有阈值的逻辑斯谛增长 Logistic Growth with a Threshold

a. 微分方程 Differential Equation

$$f(y) = y' = -r(1 - \frac{y}{T})(1 - \frac{y}{K})y$$

where $r > 0$ and $0 < T < K$.

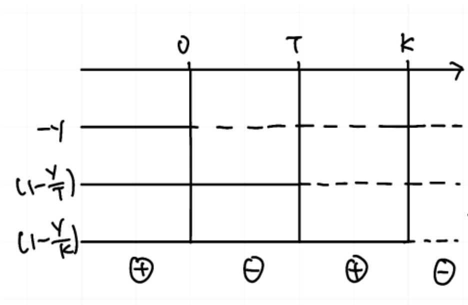
b. 判断$f(y)$与y之间的图像 Determining the Graph between $f(y)$ and y

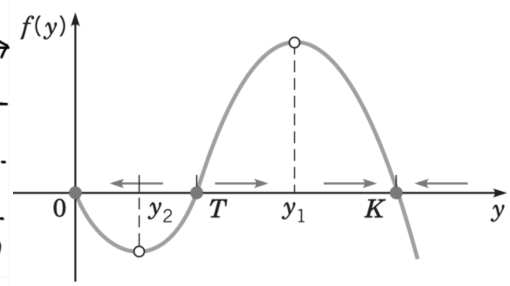
i. Step 1: 判断零点 Zeros，即当$f(y)=0$时，y的值。在本例中，当$f(y)=0$时，$y=0\ \&\ T\ \&\ K$。

ii. Step 2: 根据零点 Zeros，画出 Sign Graph。对于本例中的微分方程，需要通过把原方程分为三个部分。

$$-r\left(1-\frac{y}{T}\right)\left(1-\frac{y}{K}\right)y=-y\times\left(1-\frac{y}{T}\right)\times\left(1-\frac{y}{K}\right)\times r$$

在 Sign Graph 中，通过判断三个部分的正负性，相乘后得到$f(y)$的正负性。



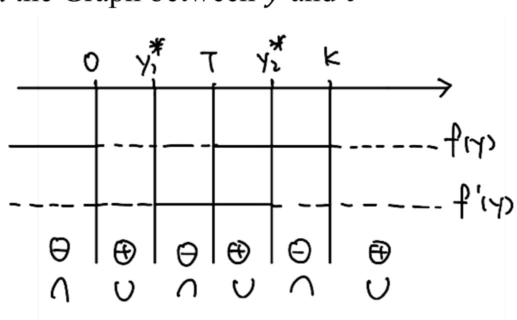


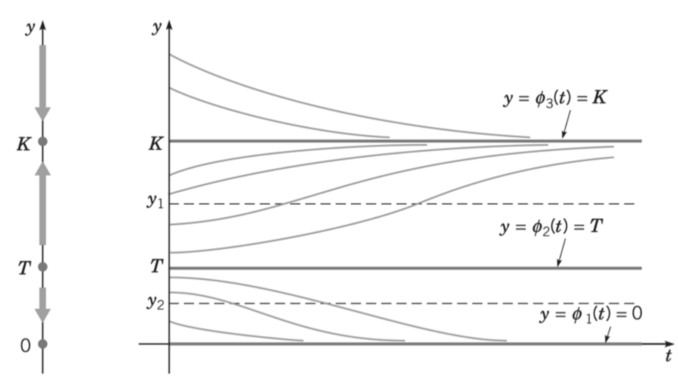
iii. Step 3: 上图为$f(y)$的正负性，现在通过其正负性和零点 Zeros，画出$f(y)$与y之间的图像。

c. 判断y与t之间的图像 Determining the Graph between y and t

i. 判断方法 Method: 与之前保持一致。

ii. y与t之间的图像 the Graph between y and t





(a) (b)

14. 相线的稳定与不稳定 Asymptotic Stability and Instability of Phase Line

a. 在相线 Phase Line 中，如果收敛于某一点，则称这点是稳定的 Stable。

(a)

例如，上图中 K 点是稳定的 Stable。

b. 在相线 Phase Line 中，如果在某一点发散，则称这点是不稳定的 Unstable。

(a)

例如，上图中 T 点是不稳定的 Unstable。

c. 在相线 Phase Line 中，如果在某一点的上下的趋势一致，则称这点是半稳定的 Semi Stable。

例如，上图中 K 点是半稳定的 Semi Stable。

第二单元 微分方程组 Systems of Differential Equation

一阶线性常微分方程组 Systems of First Linear Ordinary Differential Equations

1. 一阶线性常微分方程组的形式 Form of Systems of First Linear ODE
   a. 一阶线性常微分方程组 Systems of First Linear ODE 可以写成一个带有矩阵的一阶线性常微分方程 First Linear ODE 的形式。

$$\begin{cases} y' = A(t)y + f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad A(t)\ is\ n \times n\ matrix; f(t)\ is\ a\ vector$$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = 2y_2 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} y$$

   b. 因此，我们可以通过解这个带有矩阵的一阶线性常微分方程 First Linear ODE 来获得一阶线性常微分方程组 Systems of First Linear ODE。
2. 一阶线性常微分方程组的解 Solution of Systems of First Linear ODE
   a. If $y_1, y_2, \ldots, y_n$ are the solution of $y' = A(t)y$, then any linear combination of $y_1, y_2, \ldots, y_n$ is also a solution of $y' = A(t)y$.
   b. 基本解集合 Fundamental Set of Solutions
      i. We say that $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ is a fundamental set of solutions of $y' = A(t)y$ on (a, b) if any possible solution of the system can be written as a linear combination of $y_1, y_2, \ldots, y_n$ on (a, b).
      ii. In this case, $c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + \cdots + c_ny_n$ is a general solution of $y' = A(t)y$ on (a, b).
   c. 线性独立 Linear Independence
      i. We say that the vector functions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ are linearly independent if $c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + \cdots + c_ny_n = 0$ when $c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0$.
      ii. 线性独立是基本解成立的前提条件: Suppose the $n \times n$ matrix $A(t)$ is continuous on (a, b) and then a set $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ of n solutions of $y' = A(t)y$ on (a, b) is a fundamental set of solutions if and only if $y_1, y_2, \ldots, y_n$ are linearly independent.
   d. 朗斯基行列式 Wronskian
      i. 我们通过朗斯基行列式 Wronskian 来判断基本解集合 Fundamental Set of Solutions 是否线性独立 Linearly Independent。
      ii. 在求解朗斯基行列式 Wronskian 时，我们需要设定一个初始条件 Initial Condition，一般我们设为$t = 0$。即求解$t = 0$状态下行列式的数值。当行列式不为 0 时，我们称两个解之间线性独立 Linearly Independent。

$$Wronskian = \det Y = det \begin{bmatrix} | & | \\ y_1 & y_2 \\ | & | \end{bmatrix} \Bigg|_{t=0} \neq 0$$

e. 关于基本解集合、线性独立和朗斯基行列式的定理 Some Theorems about Fundamental Set of Solutions, Linear Independence and Wronskian

Suppose the $n \times n$ matrix $A = A(t)$ is continuous on (a, b); let $y_1, y_2, \dots, y_n$ be solutions of $y' = A(t)y$ on (a, b). Thus, the following statements are equivalent. At the same time, Y is a fundamental matrix if any of the statements are true for the columns of Y.

i. The general solution of $y' = A(t)y$ on (a, b) is $y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + \cdots + c_ny_n$, where $c_1, c_2, \dots, c_n$ are arbitrary constants.

ii. $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ is a fundamental set of solutions of $y' = A(t)y$ on (a, b).

iii. $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ is linearly independent on (a, b).

iv. The Wronskian of $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ is nonzero at some/any point of (a, b).

3. 如何求解一阶线性常微分方程组（实数范围内）How to Solve Systems of First Linear ODE (In the Real Range)

a. 实数范围内不重复本征值 Real, Separated Eigenvalues (Case 1)

i. Step 1: 写出对应原线性常微分方程组的矩阵 A。

ii. Step 2: 求解矩阵 A 的本征值 Eigenvalues 和本征向量 Eigenvectors。
- 求解$\det(A - \lambda I) = 0$，得到λ_1和λ_2（本征值 Eigenvalues）。
- 求解$(A - \lambda I)x = 0$，分别带入λ_1和λ_2，求解出对应的x_1和x_2两个向量（本征向量 Eigenvectors）。

iii. Step 3: 写出矩阵 A 的本征对 Eigenpairs $\{\lambda_1, x_1\}$和$\{\lambda_2, x_2\}$。

iv. Step 4: 代入公式得到解。

$$y_1 = x_1e^{\lambda_1 t}, y_2 = x_2e^{\lambda_2 t}$$

v. Step 5: 通过朗斯基行列式 Wronskian 来判断基本解集合 Fundamental Set of Solutions 是否线性独立 Linearly Independent。

$$Wronskian = det\left[\begin{matrix} | & | \\ y_1 & y_2 \\ | & | \end{matrix}\right]\Bigg|_{t=0} \neq 0$$

vi. Step 6: 写出通解 General Solution

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

b. 实数范围内重复本征值 Real, Repeated Eigenvalues (Case 2)

i. Step 1: 写出对应原线性常微分方程组的矩阵 A。

ii. Step 2: 求解矩阵 A 的本征值 Eigenvalue 和本征向量 Eigenvector。
- 求解$\det(A - \lambda I) = 0$，得到λ（本征值 Eigenvalue）。
- 求解$(A - \lambda I)x = 0$，带入λ，求解出对应的x向量（本征向量 Eigenvector）。

iii. Step 3: 求解矩阵 A 的广义本征向量 Generalized Eigenvector (w)。

$$(A - \lambda I)w = x$$

iv. Step 4: 代入公式得到解。

$$y_1 = xe^{\lambda t}, y_2 = (tx + w)e^{\lambda t}$$

v. Step 5: 通过朗斯基行列式 Wronskian 来判断基本解集合 Fundamental Set of Solutions 是否线性独立 Linearly Independent。

$$Wronskian = det \left. \begin{bmatrix} | & | \\ y_1 & y_2 \\ | & | \end{bmatrix} \right|_{t=0} \neq 0$$

vi. Step 6: 写出通解 General Solution。

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

4. 如何求解一阶线性常微分方程组（虚数范围内）How to Solve Systems of First Linear ODE (In the Complex Range)
    a. 叠加原理 Superposition Principle
        i. Any linear combination of $y_1^{\mathbb{C}}$ and $y_2^{\mathbb{C}}$ is also the solution of $y' = Ay$.
        ii. $Re\ (y_1^{\mathbb{C}})$ and $Im\ (y_1^{\mathbb{C}})$ are real function solutions of $y' = Ay$.
    b. 虚数范围内本征值 Complex Eigenvalues (Case 3)
        i. Step 1: 写出对应原线性常微分方程组的矩阵 A。
        ii. Step 2: 求解矩阵 A 的本征值 Eigenvalue 和本征向量 Eigenvector。
            - 若该矩阵 A 的其中一个本征值 Eigenvalue 为虚数，则两个本征值 Eigenvalue 之前互成共轭关系 Conjugation。
            - 求解$\det(A - \lambda I) = 0$，得到λ_1（本征值 1 Eigenvalue 1）。
            - 通过共轭关系，得到λ_2（本征值 2 Eigenvalue 2）。

$$\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$$

            - 求解$(A - \lambda I)x = 0$，带入λ_1，求解出对应的x_1向量（本征向量 1 Eigenvector 1）。
            - 通过共轭关系，得到x_2（本征向量 2 Eigenvector 2）。

$$x_2 = \overline{x_1}$$

        iii. Step 3: 写出$y_1^{\mathbb{C}}$与$y_2^{\mathbb{C}}$

$$y_1^{\mathbb{C}} = x_1 e^{\lambda_1 t}, y_2^{\mathbb{C}} = x_2 e^{\lambda_2 t}$$

        iv. Step 4: 虚数解实数化，通过欧拉公式 Euler's Formula 将上述的两个虚数解转化为实数方程 Real Function。
            - 选择$y_1^{\mathbb{C}}$或$y_2^{\mathbb{C}}$通过欧拉公式 Euler's Formula 实数化。

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\ \sin\theta$$

            - 写出$y_1^{\mathbb{C}}$的实部 Real Part 作为y_1；写出$y_1^{\mathbb{C}}$的虚部 Imaginary Part 作为y_2。
        v. Step 5: 通过朗斯基行列式 Wronskian 来判断基本解集合 Fundamental Set of Solutions 是否线性独立 Linearly Independent。

$$Wronskian = det\begin{bmatrix} | & | \\ y_1 & y_2 \\ | & | \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} \neq 0$$

vi. Step 6: 写出通解 General Solution。

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

c. 例子 Example: $y' = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} y$

i. Step 1: 写出对应原线性常微分方程组的矩阵 A。

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

ii. Step 2: 求解矩阵 A 的本征值 Eigenvalue 和本征向量 Eigenvector。

$$\det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)(-2 - \lambda) + 25 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 17 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 17}}{2 \cdot 1} = 1 \pm 4i$$

The eigenvalues are $1 + 4i$ and $1 - 4i$.

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 5 & -2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3-4i & -5 \\ 5 & -3-4i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(3 - 4i)x_1^{(1)} - 5x_1^{(2)} = 0$$

$$(3 - 4i)x_1^{(1)} = 5x_1^{(2)}$$

$$x_1^{(1)} = 5 \quad x_1^{(2)} = 3 - 4i$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 - 4i \end{bmatrix} \quad x_2 = \overline{x_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 + 4i \end{bmatrix}$$

The eigenvectors are $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 - 4i \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 + 4i \end{bmatrix}$.

iii. Step 3: 写出$y_1^{\mathbb{C}}$与$y_2^{\mathbb{C}}$

$$y_1^{\mathbb{C}} = x_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 - 4i \end{bmatrix} e^{(1+4i)t} \qquad y_2^{\mathbb{C}} = x_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 + 4i \end{bmatrix} e^{(1-4i)t}$$

iv. Step 4: 虚数解实数化，通过欧拉公式 Euler's Formula 将上述的两个虚数解转化为实数方程 Real Function。

$$y_1^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 - 4i \end{bmatrix} e^{(1+4i)t} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 - 4i \end{bmatrix} e^t e^{i4t} \quad \theta = 4t$$

According to the $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$,

$$y_1^{\mathbb{C}} = e^t \begin{bmatrix} 5 \\ 3 - 4i \end{bmatrix} (\cos(4t) + i\sin(4t))$$

$$y_1^{\mathbb{C}} = e^t \begin{bmatrix} (\cos(4t) + i\sin(4t)) \times 5 \\ (\cos(4t) + i\sin(4t)) \times (3 - 4i) \end{bmatrix}$$

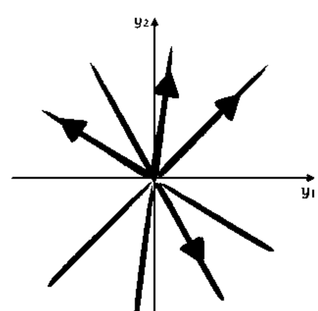
$$y_1^{\mathbb{C}} = e^t \begin{bmatrix} 5\cos(4t) + 5i\sin(4t) \\ (3-4i)(\cos(4t)) + (3-4i)(\,i\sin(4t)) \end{bmatrix}$$
$$y_1^{\mathbb{C}} = e^t \begin{bmatrix} 5\cos(4t) + 5i\sin(4t) \\ (3\cos(4t) - 4i\cos(4t)) + (3i\sin(4t) + 4\sin(4t)) \end{bmatrix}$$
$$y_1^{\mathbb{C}} = e^t \begin{bmatrix} 5\cos(4t) + 5isin(4t) \\ (3\cos(4t) + 4sin(4t)) + i(3\sin(4t) - 4\cos(4t)) \end{bmatrix}$$

Therefore,

$$y_1 = Re(y_1^{\mathbb{C}}) = e^t \begin{bmatrix} 5\cos(4t) \\ 3\cos(4t) + 4\sin(4t) \end{bmatrix}$$
$$y_2 = Im(y_1^{\mathbb{C}}) = e^t \begin{bmatrix} 5\sin(4t) \\ 3\sin(4t) - 4\cos(4t) \end{bmatrix}$$

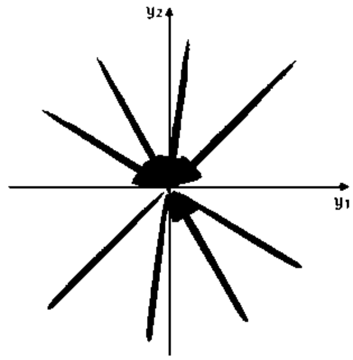
一阶线性常微分方程组的几何特征 Geometric Properties of Systems of First Linear ODEs

5. 相图的一般性质 General Setting of Phase Portrait
    a. 目的 Purpose: 画出微分方程组解的图形，我们把这种图形成为相图 Phase Portrait。相图呈现在相平面 Phase Plane 上。
    b. If y is a non-constant solution, then $(y_1(t), y_2(t))$ moves along a curve C in the y_1y_2-plane (Phase Plane).
    c. C 是无数组解 Infinitely Many Solution 的轨迹 Trajectory。
        i. 两条轨迹 Trajectory 不得相交。
        ii. 任何非平凡解的轨迹 Trajectory of A Nontrivial Solution 不得包括 (0,0)。
        iii. (0,0)点本身是平凡解的轨迹 Trajectory of A Trivial Solution。
6. 实数范围内不重复本征值 Real, Separated Eigenvalues (Case 1)
    a. 半直线 Half Line: 在这种情况下，当我们去画相图 Phase Portrait 时，我们把每根线画为半直线 Half Line，其不接触原点。
    b. 定点 Fixed Point: 我们称原点为定点 Fixed Point，因为其永远都代表平凡解的轨迹 Trajectory of A Trivial Solution。
    c. 当 2 个本征值 Eigenvalues 相等但对应 2 个不相等的本征向量 Eigenvectors 时
        i. 当$\lambda > 0$，$\lim_{t\to\infty} xe^{\lambda t} = \infty$, $\lim_{t\to -\infty} xe^{\lambda t} = 0$。轨迹 Trajectory 方向向外。



真节点 Proper Node，不稳定 Unstable。

ii. 当$\lambda < 0$，$\lim_{t\to\infty} xe^{\lambda t} = 0, \lim_{t\to-\infty} xe^{\lambda t} = \infty$。轨迹 Trajectory 方向向内。



真节点 Proper Node，渐近稳定 Asymptotically Stable。

d. 当 2 个本征值 Eigenvalues 不等且对应 2 个不相等的本征向量 Eigenvectors 时

i. Step 1: 计算本征值 Eigenvalues 和本征向量 Eigenvectors，令$\lambda_2 > \lambda_1 \neq 0$。

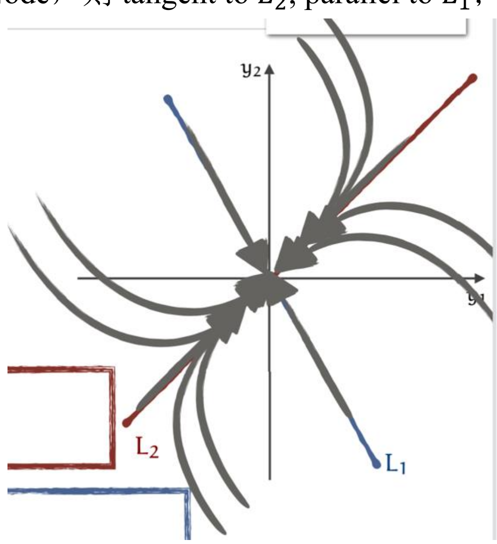
ii. Step 2: 根据本征值 Eigenvalues 的正负，判断定点的类型 Types of Fixed Point。

- Real $-,-$ Stable Node 稳定节点
- Real $+,+$ Unstable Node 不稳定节点
- Real $+,-$ Saddle Point 鞍点

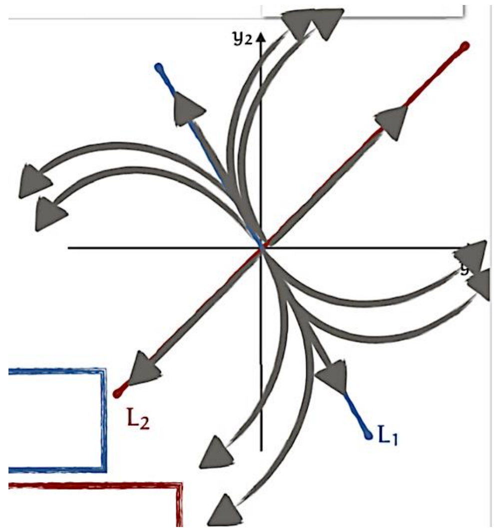
iii. Step 3: 在相平面 Phase Plane 上画出本征向量 Eigenvectors，称x_1为L_1，称x_2为L_2。

iv. Step 4: 根据定点类型 Types of Fixed Point 画出图像。以 Tangent 的那条线切割图形为两侧。

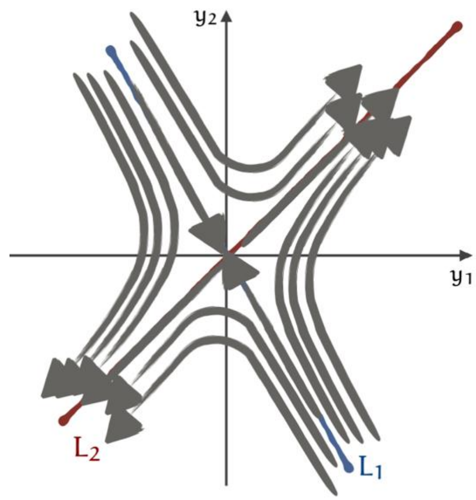
- 若为 Stable Node，则 tangent to L_2, parallel to L_1；



- 若为 Unstable Node，则 tangent to L_1, parallel to L_2；



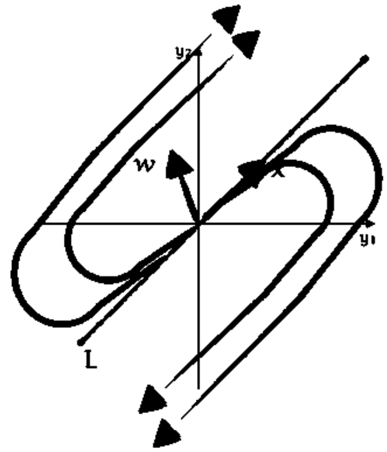
- 若为 Saddle Point，则 tangent to L_1, L_2。



7. 实数范围内重复本征值 Real, Repeated Eigenvalues (Case 2)
   a. 当本征值 Eigenvalues 大于 0 时
      i. 逼近状态如下，

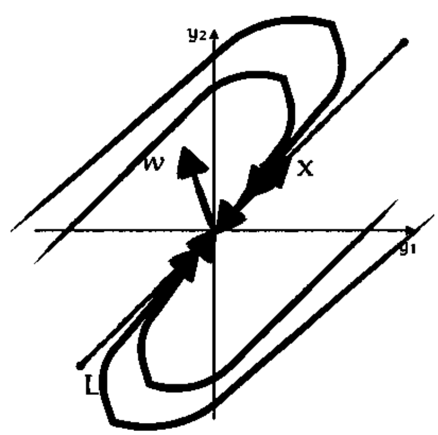
$$\lim_{t\to\infty} ||\, C_1 x e^{\lambda t} + C_2 x e^{\lambda t}(w + tx)|| = \infty$$
$$\lim_{t\to-\infty} ||\, C_1 x e^{\lambda t} + C_2 x e^{\lambda t}(w + tx)|| = 0$$

      ii. 图形绘制方法，
         - Step 1: 在相平面 Phase Plane 上画出本征向量 Eigenvector 和广义本征向量 Generalized Eigenvector。
         - Step 2: 以本征向量 Eigenvector x 的方向为轴画出 L 线。
         - Step 3: 曲线以“从本征向量 Eigenvector 上方出来，往非广义本征向量 Generalized Eigenvector 的方向逼近无限（与 L 平行）”的形式画出。（从 x 上出，出在非 w 的方向）（发散）。



非正常节点 Improper Node，不稳定 Unstable。

b. 当本征值 Eigenvalues 小于 0 时
   i. 逼近状态如下，
$$\lim_{t\to\infty} ||\, C_1 x e^{\lambda t} + C_2 x e^{\lambda t}(w + tx)|| = 0$$
$$\lim_{t\to-\infty} ||\, C_1 x e^{\lambda t} + C_2 x e^{\lambda t}(w + tx)|| = \infty$$
   ii. 图形绘制方法，
      - Step 1: 在相平面 Phase Plane 上画出本征向量 Eigenvector 和广义本征向量 Generalized Eigenvector。
      - Step 2: 以本征向量 Eigenvector x 的方向为轴画出 L 线。
      - Step 3: 曲线以“从广义本征向量 Generalized Eigenvector 的一边出发指向本征向量 Eigenvector”的形式画出。（与 x 箭头相对，在 w 方向）（收敛）。

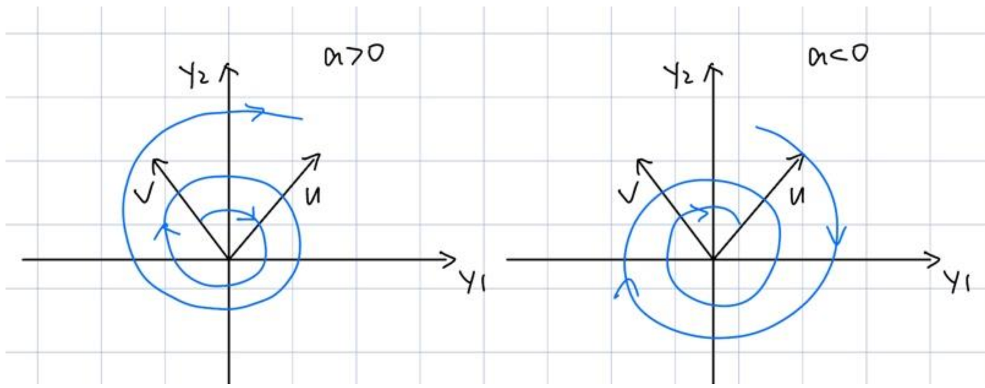


非正常节点 Improper Node，渐近稳定 Asymptotically Stable。

8. 虚数范围内本征值 Complex Eigenvalues (Case 3)
   a. Step 1: 求解本征值 Eigenvalues，形式为$a \pm bi$。
      i. 当$a = 0$时，图形为 Center Point and Stable。

ii. 当$a > 0$时，图形为 Spiral Point and Unstable。
iii. 当$a < 0$时，图形为 Spiral Point and Asymptotically Stable。

b. Step 2: 求解本征向量 Eigenvectors，形式为$u \pm iv$。在相平面 Phase Plane 上画出本征向量 Eigenvector 中的 u 向量和 v 向量。如果我们在前面选择了$a + bi$，在寻找 u 向量和 v 向量时需要使用$u + iv$，反之亦然。
  i. 当$a > 0$时，从 v 向量往 u 向量旋转，从小角度旋转。箭头往外标。
  ii. 当$a < 0$时，从 u 向量往 v 向量旋转，从小角度旋转。箭头往内标。



一阶非线性常微分方程组（自治微分方程组）的模型 Models of System of Autonomous Differential Equations

9. 自治微分方程组模型分析方法 Analytical Methods for Models of Systems of Autonomous Differential Equations
  a. 零增长线 Nullclines
    i. The x-nullclines are the curves in the xy-plane that satisfy $f(x, y) = 0$. Along these curves $x' = 0$.
    ii. The y-nullclines are the curves in the xy-plane that satisfy $g(x, y) = 0$. Along these curves $y' = 0$.
    iii. 求解方法：
      - 把原方程变形成x/y乘某个多项式的形式。
      - 零增长线 Nullclines 是指当$x' = 0$或$y' = 0$时，对应的解。情况一应是$x = 0$和$y = 0$。情况二应是对应多项式等于 0。
  b. 平衡点 Equilibrium Points
    i. 平衡点 Equilibrium Points 是两个零增长线相交的点，代表系统中的动态平衡状态。
    ii. 求解方法：把上述根据$x' = 0$和$y' = 0$解出的方程进行排列组合，得出相应方程的多个交点。
  c. 相平面分析 Phase-Plane Analysis

i. 我们需要在相平面 Phase-Plane 中画出$x' = 0$和$y' = 0$对应的四个解对应的方程（即零增长线 Nullclines）。
ii. 在相平面 Phase-Plane 标出之前算出的平衡点 Equilibrium Points。
iii. 由于零增长线 Nullclines 把相平面 Phase-Plane 分成了数个部分，现在需要在每个部分中分别判断 Direction Arrows。
- 需要在每个部分中取一特殊点，并代入原先的两个微分方程判断其导函数的正负值。
- 在相平面 Phase-Plane 中标出其正负方向。对于x，右为正，左为负；对于y，上为正，下为负。
- 根据正负方向画出图形。

10. 捕食者-猎物模型 Predator-Prey Model

a. 在这个模型中，兔子（猎物 Prey）和狼（捕食者 Predator）的微分方程可以分别单独表示为

$$Rabbits: \frac{dR}{dt} = rR, with\ r > 0$$

$$Wolves: \frac{dW}{dt} = -kW, with\ k > 0$$

对于兔子：
- Call R(t) the number of rabbits.
- The rabbits have ample food supplies.
- In absence of predators, the food supply would support exponential growth of the prey.

对于狼：
- Call W(t) the number of wolves.
- The wolves feed on the rabbits.
- In absence of prey, the predators would decline at a rate which is proportional the actual population.

b. 在这个模型中，兔子（猎物 Prey）和狼（捕食者 Predator）的数量随时间变化由以下两个常微分方程 ODEs 描述

$$Rate\ of\ change\ in\ rabbits: \frac{dR}{dt} = rR - aRW$$

rR表示在没有狼的情况下，兔子的自然增长率，假设兔子有充足的食物供应。

aRW表示狼捕食兔子的速率，这导致兔子减少。

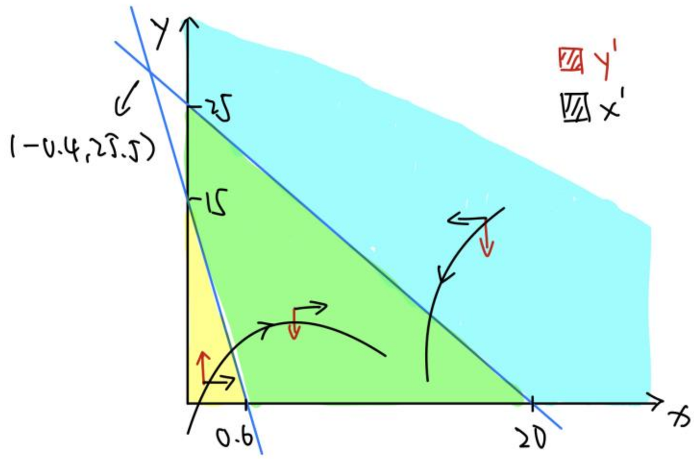
$$Rate\ of\ change\ in\ wolves: \frac{dW}{dt} = -kW + bRW$$

$-kW$表示在没有兔子的情况下，狼的自然死亡率。

bRW表示狼因捕食兔子而增加的数量，即狼的出生率依赖于捕食兔子的数量。

11. 竞争模型 Competition Model
    a. 对于竞争模型，下面的公式为通式。若题目中给出r, s, u, v, K, L的数值，即可直接带入后获得微分方程。
    b. Let us call the two species X and Y with populations $x(t)$ and $y(t)$. Each population alone would grow according to the equations
    $$x' = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) \quad y' = sy(1 - \frac{y}{L})$$
    while the coupled system is given by
    $$\begin{cases} x' = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - uxy \\ y' = sy\left(1 - \frac{y}{L}\right) - vxy \end{cases}$$
    where r, s, u, v, K, L are constants.
12. 案例 Example
    a. 题目: Given the system
    $$x' = 0.05x\left(1 - \frac{x}{20}\right) - 0.002xy \quad y' = 0.09y\left(1 - \frac{y}{15}\right) - 0.15xy$$
    (a) Find the nullclines and the equilibrium points.
    (b) Draw nullclines and equilibria on the xy-plane.
    (c) Draw the combined arrows in each different region of the plane.
    (d) Describe the equilibrium points.
    (e) Estimate the behavior of $x(t)$ and $y(t)$ as $t \to \infty$ and make conclusion about the long-term behavior of the populations.
    b. 零增长线 Nullclines
        i. $x' = 0.05x - 0.0025x^2 - 0.002xy = x(0.05 - 0.0025x - 0.002y)$
            - $x = 0$
            - $0.05 - 0.0025x - 0.002y = 0$
        ii. $y' = 0.09y - 0.006y^2 - 0.15xy = y(0.09 - 0.006y - 0.15x)$
            - $y = 0$
            - $0.09 - 0.006y - 0.15x = 0$
    c. 平衡点 Equilibrium Points
        i. $E_0: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ no individuals
        ii. $E_1: \begin{cases} x = 0 \\ 0.09 - 0.006y - 0.15x = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 15 \end{cases}$ x extinct and y constant
        iii. $E_2: \begin{cases} y = 0 \\ 0.05 - 0.0025x - 0.002y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 20 \\ y = 0 \end{cases}$ x constant and y extinct
        iv. $E_3: \begin{cases} 0.09 - 0.006y - 0.15x = 0 \\ 0.05 - 0.0025x - 0.002y = 0 \end{cases} \begin{cases} x \approx -0.421 \\ y \approx 25.526 \end{cases}$ not in the domain

d. 相平面分析 Phase-Plane Analysis



对于黄色区域，我们取特殊点(0.5,0.5)

- $x' = 0.023875 > 0$
- $y' = 0.0285 > 0$

对于绿色区域，我们取特殊点(2,2)

- $x' = 0.082 > 0$
- $y' = -0.444 < 0$

对于蓝色区域，我们取特殊点(30,30)

- $x' = -2.55 < 0$
- $y' = -137.7 < 0$

e. 种群长期行为结论 Conclusion about the Long-Term Behavior of the Populations
由于图中的两根线共同指向x轴，这意味着y将会 extinct，而 x 会保持 constant。

第三单元 二阶线性常微分方程 Second-Order Linear Ordinary Differential Equation

二阶线性常微分方程的分类与基本解集合 Classification and Fundamental Set of Solutions for Second-Order Linear ODE

1. 二阶线性常微分方程的形式 Form of Second-Order Linear ODE
   a. 二阶线性常微分方程的形式与一阶线性常微分方程类似
   $$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$
   b. 二阶线性常微分方程可以分为两类，分别是齐次方程 Homogeneous Equation 和非齐次方程 Non-Homogeneous Equation
      i. 齐次方程 Homogeneous Equation: 当$f(x)$为 0 时，
      $$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$
      ii. 非齐次方程 Non-Homogeneous Equation: 当$f(x)$不为 0 时，
      $$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$
   c. 解的唯一性定理 Uniqueness Theorem for Second-Order Linear ODEs
      i. Suppose $p(x), q(x), f(x)$ are continuous on (a, b), assume $x_0 \in (a, b)$ and k_0 and k_1 are arbitrary real number.
      ii. The IVP $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = k_0 \quad y(x_1) = k_1 \end{cases}$ has a unique solution on (a, b).
2. 二阶线性常微分方程解的形式 Solution Form of Second-Order Linear ODE
   a. 齐次方程 Homogeneous Equation
   $$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$
   b. 非齐次方程 Non-Homogeneous Equation
   $$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$$
3. 二阶线性常微分方程的基本解集合 Fundamental Set of Solutions
   a. 朗斯基行列式 Wronskian 仍旧需要来判断该解是否为通解 General Solution
   $$W[y_1, y_2] = det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$$
   若朗斯基行列式 Wronskian 不为 0，则该解线性独立 Linearly Independent，则其为通解 General Solution。
   b. 朗斯基行列式相关定理 Theorem Related to Wronskian
      i. Suppose that $p(x), q(x)$ are continuous on (a, b) and suppose that y_1 and y_2 are solutions of $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ on (a, b).
      ii. Theorem 1: Given Initial Conditions $y(x_0) = k_0 \quad y'(x_0) = k_1$ with $x_0 \in (a, b)$. It is always possible to choose c_1 and c_2 such that $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ satisfies that IVP if and only if $W[y_1, y_2] \neq 0$.
      iii. Theorem 2: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ is a general solution of the equation if and only if $W[y_1, y_2] \neq 0$.

c. 叠加原理与基本解集合 Principle of Superposition and Fundamental Set of Solutions of Second-Order Linear ODE
   i. 叠加原理 Principle of Superposition: Let y_1, y_2 are solution of $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ on (a, b). Then any linear combination of y_1, y_2 is also a solution of the equation on (a, b).
   ii. Solutions that satisfy Theorem 2 form a Fundamental Set of Solutions.

d. 二阶线性常微分方程解与基本解集合的关系 Relationship between Solution of Second-Order Linear ODE and Fundamental Set of Solutions
   i. 齐次方程 Homogeneous Equation
$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$
   其中y_1, y_2的集合称为基本解集合 Fundamental Set of Solutions。
   ii. 非齐次方程 Non-Homogeneous Equation
$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p$$
   其中y_1, y_2的集合称为基本解集合 Fundamental Set of Solutions；而y_p称为特解 Particular Solution。$c_1y_1 + c_2y_2 + y_p$称为通解 General Solution。
   iii. 非齐次方程的解是由齐次方程的解$c_1y_1 + c_2y_2$（补函数的解 Solution of Complementary Equation；基本解集合 Fundamental Set of Solutions）加一个特解 Particular Solution y_p构成的。

4. 阿尔贝公式 Abel's Formula
   a. 阿尔贝公式Abel's Formula解释了为什么在计算朗斯基行列式Wronskian时，当令$x = 0$时得出$W[y_1, y_2] \neq 0$，代表在任意条件下，$W[y_1, y_2] \neq 0$。
$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$
   b. 因此，当$W(x_0)$为 0 时，$W(x) = 0$，反之亦然。

二阶常数齐次线性常微分方程的解 Solution of Second-Order Constant-Coefficient Homogeneous Linear ODEs

5. 求解步骤 Steps to Find Solutions
   a. Step 1: 针对原方程找到关于r的特征多项式 Characteristic Polynomial，并求解出r_1, r_2。
$$ay'' + by' + cy = 0$$
$$Characteristic\ Polynomial: p(r) = ar^2 + br + c = 0$$
   b. Step 2: 根据求解出r_1, r_2的数值，将解分为以下三种类别。
      i. 当 $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ 且 $r_1 \neq r_2$，$y_1 = e^{r_1x}, y_2 = e^{r_2x}$。
      ii. 当 $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ 且 $r_1 = r_2$，$y_1 = e^{rx}, y_2 = xe^{rx}$。
      iii. 当 $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ 且 $r_1 = \overline{r_2} = \alpha \pm i\beta$，$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x), y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.

c. Step 3: 通过朗斯基行列式 Wronskian 来判断基本解集合 Fundamental Set of Solutions 是否线性独立 Linearly Independent。

$$Wronskian = det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}\Bigg|_{x=0} \neq 0$$

d. Step 4: 写出通解 General Solution。

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

二阶常数非齐次线性常微分方程的解 Solution of Second-Order Constant-Coefficient Non-Homogeneous Linear ODEs

6. 待定系数法 Method of Undetermined Coefficients
   a. 在解决二阶常数非齐次线性常微分方程 Second-Order Constant-Coefficient Non-Homogeneous Linear ODEs 时，我们可以使用待定系数法 Method of Undetermined Coefficients 求解。我们知道非齐次方程的解为

   $$y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p$$

   我们使用待定系数法 Method of Undetermined Coefficients 是为了求解y_p特解 Particular Solution；而$c_1y_1 + c_2y_2$仍旧是基本解集合 Fundamental Set of Solutions，即该非齐次方程 Non-Homogeneous Equation 对应的补函数的解 Solution of Complementary Equation。
   b. 求解步骤 Steps to Find Solutions
      i. Step 1: 找到该非齐次方程 Non-Homogeneous Equation 对应的补函数 Complementary Equation，并通过特征多项式 Characteristic Polynomial 求出$c_1y_1 + c_2y_2$（即基本解集合 Fundamental Set of Solutions）。
      ii. Step 2: 判断原方程右边$f(x)$是否包括在基本解集合 Fundamental Set of Solutions 中，比如：

      $$y'' - 8y' + 16y = 2e^{4x} \quad y_1 = e^{4x}; y_2 = xe^{4x}$$

      在上述题目中，$2e^{4x}$就包括在基本解集合 FSS $\{e^{4x}, xe^{4x}\}$ 中。
      iii. Step 3: 根据原方程右边$f(x)$的类型设y_p
         - 右边为多项式 Polynomial，设$y_p = A + Bx + Cx^2$
         - 右边为指数函数 Exponential Function，设$y_p = Ae^{\alpha x}$（$e^{\alpha x}$就是原方程$f(x)$的数值）
         - 右边为三角函数 Trigonometric Function，设$y_p = Acos(\beta x) + Bsin(\beta x)$（$cos(\beta x)$和$sin(\beta x)$就是原方程$f(x)$的数值）
      iv. Step 4: 根据 Step 2，若原方程右边$f(x)$有部分包括在基本解集合 FSS 中，则需要给y_p乘x。若y_p乘x的结果依旧出现在基本解集合 FSS 中，则再额外乘x。比如：

      $$y'' - 8y' + 16y = 2e^{4x} \quad y_1 = e^{4x}; y_2 = xe^{4x}$$

在上述题目中，$2e^{4x}$就包括在基本解集合 FSS $\{e^{4x}, xe^{4x}\}$ 中。因此，我们设$y_p = Ax^2e^{4x}$，因为xe^{4x}依旧在基本解集合 FSS 中。

v. Step 5: 求解$y_p{}'$和$y_p{}''$，并把y_p、$y_p{}'$和$y_p{}''$均代回原方程并化简。

$$y_p' = A(2xe^{4x} + e^{4x} \cdot 4x^2) \quad y_p'' = A(16e^{4x}x^2 + 16e^{4x}x + 2e^{4x})$$

因此，原方程可以写为，

$$A(16e^{4x}x^2 + 16e^{4x}x + 2e^{4x}) - 8A(2xe^{4x} + e^{4x} \cdot 4x^2) + 16Ax^2e^{4x} = 2e^{4x}$$

vi. Step 6: 求解未知数以得到y_p。

$$A2e^{4x} = 2e^{4x} \quad A = 1$$

vii. Step 7: 写出通解 General Solution。

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p$$

在上述题目案例中，通解 General Solution 应为

$$y = c_1e^{4x} + c_2xe^{4x} + x^2e^{4x}$$

c. 方程右边几种函数组合的情况 Several Combinations of Functions on the Right Hand Side of the Equation

i. 右边为多项式与指数函数相乘的形式 $kP(x)e^{\alpha x}$

- $y_p = (A + Bx + Cx^2)e^{\alpha x}$, if $e^{\alpha x} \notin \{y_1, y_2\}$.
- $y_p = x(A + Bx + Cx^2)e^{\alpha x}$, if $e^{\alpha x} \in \{y_1, y_2\}$, but $xe^{\alpha x} \notin \{y_1, y_2\}$.
- $y_p = x^2(A + Bx + Cx^2)e^{\alpha x}$, if $\{y_1, y_2\} = \{e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}\}$.

ii. 右边为多项式与三角函数相乘的形式 $P(x)\cos(\omega x) + Q(x)\sin(\omega x)$

- P, Q are polynomials, $k = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$
- $y_p = A(x)\cos(\omega x) + B(x)\sin(\omega x)$, with A and B polynomials of K, if $\{y_1, y_2\} \neq \{\cos(\omega x), \sin(\omega x)\}$
- $y_p = xA(x)\cos(\omega x) + xB(x)\sin(\omega x)$, with A and B polynomials of K, if $\{y_1, y_2\} = \{\cos(\omega x), \sin(\omega x)\}$

iii. 右边为指数函数与三角函数相乘的形式$e^{\lambda x}[\cos(\omega x) + \sin(\omega x)]$

- $y_p = Ae^{\lambda x}(\cos(\omega x) + \sin(\omega x))$, if $e^{\alpha x}(\cos(\omega x) + \sin(\omega x) \notin \{y_1, y_2\}$.
- $y_p = Axe^{\lambda x}(\cos(\omega x) + \sin(\omega x))$, if $e^{\alpha x}(\cos(\omega x) + \sin(\omega x) \in \{y_1, y_2\}$.

iv. 右边为多项式、指数函数与三角函数相乘的形式 $e^{\lambda x}[P(x)\cos(\omega x) + Q(x)\sin(\omega x)]$

- P, Q are polynomials, $k = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$
- $y_p = e^{\lambda x}[A(x)\cos(\omega x) + B(x)\sin(\omega x)]$, with A and B polynomials of K, if $\{y_1, y_2\} \neq \{e^{\lambda x}\cos(\omega x), e^{\lambda x}\sin(\omega x)\}$

- $y_p = xe^{\lambda x}[A(x)\cos(\omega x) + B(x)\sin(\omega x)]$, with A and B polynomials of K, if $\{y_1, y_2\} = \{e^{\lambda x}\cos(\omega x), e^{\lambda x}\sin(\omega x)\}$

d. 如何计算方程右边为 $kP(x)e^{\alpha x}$ 的情况 How to Calculate the $kP(x)e^{\alpha x}$ as RHS

i. Step 1: 寻找 FSS，并判断方程右侧是否在 FSS 里，根据此设出y_p。

$$y'' - 4y' + 3y = e^{3x}(6 + 8x + 12x^2)$$

We can find the FSS is

$$FSS = \{e^x, e^{3x}\}$$

We find that $e^{3x} \in FSS$. Therefore,

$$y_p = e^{3x}x(A + Bx + Cx^2) = e^{3x}(Ax + Bx^2 + Cx^3)$$

ii. Step 2: 将y_p设为$ue^{\alpha x}$。

$$y_p = ue^{3x}$$

iii. Step 3: 求解$y_p{}'$和$y_p{}''$，并把y_p、$y_p{}'$和$y_p{}''$均代回原方程并化简。化简后的结果应该是关于u的 ODE。

$$y_p' = u'e^{3x} + 3ue^{3x}$$
$$y_p'' = u''e^{3x} + 6u'e^{3x} + 9ue^{3x}$$

The equation is following below.

$$(u'' + 6u' + 9u) - 4(u' + 3u) + 3u = 6 + 8x + 12x^2$$

We can find that

$$u'' + 2u' = 6 + 8x + 12x^2$$

iv. Step 4: 我们现在需要求解这个新的关于u的 ODE，设u_p为原y_p剩下的部分，并计算$u_p{}'$和$u_p{}''$。

$$u_p = Ax + Bx^2 + Cx^3 \quad u_p' = A + 2Bx + 3Cx^2 \quad u_p'' = 2B + 6Cx$$

v. Step 5: 把u_p、$u_p{}'$和$u_p{}''$代入原方程，求解A, B, C。

$$[2B + 6Cx] + 6[A + 2Bx + 3Cx^2] = 6 + 8x + 12x^2$$
$$\begin{cases} 6C = 12 \\ 6C + 4B = 8 \\ 2B + 2A = 6 \end{cases} \begin{cases} A = 4 \\ B = -1 \\ C = 2 \end{cases}$$

vi. Step 6:写出通解 General Solution。

$$y = c_1e^x + c_2e^{3x} + e^{3x}(4x - x^2 + 2x^3)$$

二阶非常数非齐次线性常微分方程的解 Solution of Second-Order Non-Constant-Coefficient Non-Homogeneous Linear ODEs

7. 二阶非常数非齐次线性常微分方程的形式 Form of Second-Order Non-Constant-Coefficient Non-Homogeneous Linear ODEs

a. 二阶非常数非齐次线性常微分方程 Second-Order Non-Constant-Coefficient Non-Homogeneous Linear ODEs 的形式如下

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F(x)$$

其中P_0, P_1, P_2均为多项式 Polynomial

b. 在求解该类方程时，我们可以使用降幂法 Method of Reduction of Order 或者常数变易法 Method of Variation of Parameters。但在使用这两种方法时，如下的前提条件需要满足
   i. $P_0, P_1, P_2, F(x)$ continuous on (a, b).
   ii. $P_0(x) \neq 0$.（有效区间 Interval of Validity）
c. 二阶非常数非齐次线性常微分方程 Second-Order Non-Constant-Coefficient Non-Homogeneous Linear ODEs 的解依旧是由两个部分组成，分别是补函数的解 Solution of Complementary Equation 和特解y_p。但是我们不知道如何求解非常数方程的补函数的解 Solution of Complementary Equation，因此该条件会已知给出。

8. 降幂法 Method of Reduction of Order
   a. 使用条件 Condition: 若题目给出补函数的解 Solution of Complementary Equation 只有一个，则使用该方法。
   b. 解的形式 Form of Solution: $y(x) = u(x)y_1(x)$
   c. 求解步骤 Steps to Find Solutions
      i. 设 Solution of Complementary Equation 为$y_1(x)$；设方程的 General Solution 为$y = u(x)y_1(x)$。
$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = x^2$$
$$y_1 = e^x \quad y = ue^x$$
      ii. 求解y'和y''并代入原方程，化简后得到关于u'的一阶常微分方程 First-Order ODE。
$$y' = u'e^x + ue^x \quad y'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x$$
$$x(u''e^x + 2u'e^x + ue^x) - (2x+1)(u'e^x + ue^x) + (x+1)(ue^x) = x^2$$
The simplification leads to
$$xu'' - u' = x^2e^{-x}$$
      iii. 设$z = u', z' = u''$，将方程转化为化简后得到关于z的一阶常微分方程 First-Order ODE。
$$xz' - z = x^2e^{-x}$$
      iv. 运用积分因子法 Integrating Factor Method 求解上述一阶常微分方程 First-Order ODE 并得到$z(x)$。
$$z' - \frac{1}{x}z = xe^{-x}$$
$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$$
$$z(x) = x\left(\int xe^{-x}\frac{1}{x}dx + c_2\right) = -xe^{-x} + c_2x$$
      v. 由于$z = u'$，通过求积分得到$u(x)$。

$$u(x) = \int z(x)dx = xe^{-x} + e^{-x} + c_2\frac{x^2}{2} + c_1$$

vi. 写出$y(x)$。并通过朗斯基行列式 Wronskian 来判断基本解集合 Fundamental Set of Solutions 是否线性独立 Linearly Independent。

$$Wronskian = det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}\Big|_{x=0} \neq 0$$

Therefore, in this question

$$y(x) = c_1e^x + c_2x^2e^x + x + 1$$
$$W[y_1, y_2] = 2xe^{2x} \neq 0$$

vii. 写出通解 General Solution。

$$y(x) = c_1e^x + c_2x^2e^x + x + 1$$

9. 常数变易法 Method of Variation of Parameters
   a. 使用条件 Condition: 若题目给出补函数的解 Solution of Complementary Equation 有两个，则使用该方法。
   b. 解的形式 Form of Solution: $y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$
   c. 求解步骤 Steps to Find Solutions
      i. 设 Solution of Complementary Equation 为$y_1(x), y_2(x)$；设方程的 General Solution 为$y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$。
      ii. 求解朗斯基行列式 Wronskian 的值，并判断基本解集合 Fundamental Set of Solutions 是否线性独立 Linearly Independent。

$$Wronskian = det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$$

      iii. 通过如下公式求解u_1, u_2。
         - $u_1(x) = -\int \frac{F(x)}{P_0(x)W(x)} y_2(x)dx + C_1$
         - $u_2(x) = \int \frac{F(x)}{P_0(x)W(x)} y_1(x)dx + C_2$
      iv. 若上述公式中加了C，则得出的$y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$就为通解 General Solution；若没有加C，则为特解 Particular Solution。

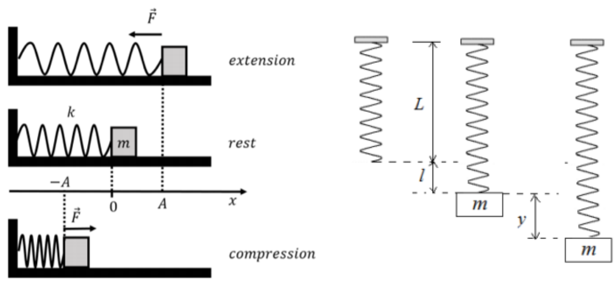
二阶线性常微分方程求解汇总 Summary of Second-Order Linear ODE

10. 若为 Homogenous 且 Constant-Coefficient，则使用 Characteristic Polynomial 寻找 FSS。FSS 即 General Solution。
11. 若为 Non-Homogenous，且 Constant-Coefficient，则使用 Method of Undetermined Coefficients 寻找 General Solution。General Solution 的形式为$FSS + y_p$。
12. 若为 Non-Homogenous，且 Non-Constant-Coefficient，则使用 Method of Reduction of Order 或 Method of Variation of Parameters 寻找 General Solution。General Solution 的形式为$FSS + y_p$。

a. 若条件中仅提供一解，则使用 Method of Reduction of Order。
b. 若条件中提供两解，可以使用 Method of Reduction of Order 或 Method of Variation of Parameters。

二阶线性常微分方程应用 Application of Second-Order Linear ODE

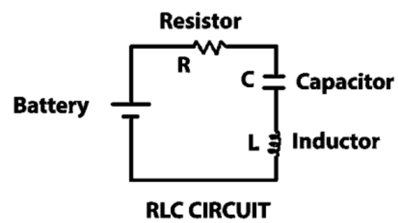
13. 应用一：振动弹簧 Application I: Vibrating Springs
    a. 基本物理学公式 Basic Physics Formulas
        i. 牛顿第二运动定律 Newton's Second Law: $F = ma$
        ii. 胡克定律 Hooke's Law: $F = -kx$
        iii. 物理图形 Physical Graphics



    b. 情况一：无摩擦力/无外力 Situation I: Frictionless/No External Force
    $$mx'' + kx = 0$$
    在求解过程中，令$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$，则
    $$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$
    c. 情况二：有摩擦力/无外力 Situation II: Friction/No External Force
    $$mx'' + cx' + kx = 0$$
    cx'中的c指阻尼力 Damping Force。
    当$r_1, r_2 < 0$，则$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$；
    当$r_1 = r_2 < 0$，则$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{rt}$；
    当$r_1 = \overline{r_2} \in \mathbb{C}$，则$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))$。
    d. 情况三：有摩擦力/有外力 Situation II: Friction/External Force
    $$mx'' + cx' + kx = F_{ext}(t)$$
    $$x(t) = x^H(t) + x_p(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + x_p(t)$$
14. 应用二：电路 Application II: Electric Circuit
    a. 基本物理学公式 Basic Physics Formulas
        i. 电流 Current: $I = I(t) = Q'(t) = current\ at\ any\ time\ t$
        ii. 电荷量 Quantity of Electric Charge: $Q - Q(t) = charge\ at\ any\ time\ t$
        iii. 电压变化 Voltage Change
            - 在电阻 Resistor R上的电压变化是RI。

- 在电感 Inductor L上的电压变化是LI'。
- 在电容 Capacitor C上的电压变化是$\frac{Q}{C}$。

iv. 物理图形 Physical Graphic



b. 关于电荷量的微分方程 ODE on Quantity of Electric Charge

$$\begin{cases} LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = E \\ Q(0) = Q_0; I(0) = I_0 \end{cases}$$

$$LI' + RI + \frac{Q}{C} = E$$

15. 应用三：变化率问题 Application III: Problem of Rate of Change

a. 基本物理学公式 Basic Physics Formulas

$$Rate\ of\ Change = Rate\ In - Rate\ Out$$

b. 关于变化率的微分方程 ODE on Rate of Change

$$Q'\ (Total\ Rate\ of\ Change) = Rate\ In - Rate\ Out$$

可以使用单位判断具体公式。

c. 题目案例

i. Example: A tank initially contains 40 pounds of salt dissolved in 600 gallons of water. Starting at $t_0 = 0$, water that contains 1/2 pound of salt per gallon is poured into the tank at the rate of 4 gal/min and the mixture is drained from the tank at the same rate. Find a differential equation for the quantity Q(t) of salt in the tank at time $t > 0$.

ii. 在本题中，总变化率 Total Rate of Change 为$\frac{dQ}{dt} = Q'$，其单位为 lbs/min。因此 Rate In 的总单位也应为 lbs/min，由 lbs/gal 与 gal/min 相乘得到。

$$Rate\ In = \frac{1}{2} \times 4 = lbs/gal \times gal/min$$

对于 Rate Out，其总单位也应为 lbs/min，由 lbs/gal 与 gal/min 相乘得到。

$$Rate\ Out = \frac{Q}{600} \times 4 = lbs/gal \times gal/min$$

因此总方程为，

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2} \times 4 - \frac{Q}{600} \times 4 \Rightarrow Q' + \frac{Q}{150} = 2$$