

LINEAR OPTIMIZATION

LINEAR OPTIMIZATION

美国大学课程线性规划

OPTIMIZATION

作者：梁梓涵
Author: Zihan Liang

Lecture 0: Linear Algebra as Prerequisite

Systems of Linear Equations

1. 核心形式

$$Ax = b$$

a. A 是 $m \times n$ 矩阵;

b. x 是 $n \times 1$ 矩阵;

c. b 是 $m \times 1$ 矩阵。

d. 这说明维度 dimension 必须匹配

$$(m \times n)(n \times 1) = (m \times 1)$$

2. 在 Optimization 里的意义: 我们会说

$$Ax = b, x \geq 0$$

这就是 feasible region 的等式约束部分。

Row Operations

3. 三种 EROs

a. 缩放一行

$$R_i \leftarrow cR_i, c \neq 0$$

b. 行加法

$$R_i \leftarrow R_i + cR_j$$

c. 交换两行

$$R_i \leftrightarrow R_j$$

4. Pivoting: 通过 EROs 把若干列变成单位向量。比如, 我们考虑矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

a. Step 1: 对第一列进行 pivoting

i. 选一个非 0 元素, $a_{11} = 2$, 这是 pivot element。

ii. 把它变成 1, 通过 ERO 1 ($R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1$), 我们得到:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

iii. 用它消掉同列其他元素, 通过 ERO 2 ($R_2 \leftarrow R_2 - 4R_1$), 我们得到:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Step 2: 继续 pivot 第二列, 我们得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [I_1 \quad I_2]$$

$\mathbb{R}^m$ 与 Unit Vector

5. $\mathbb{R}^m$ 的定义

$$\mathbb{R}^m = \{(c_1, \dots, c_m) : c_i \in \mathbb{R}\}$$

- a. m 维实向量空间。
- b. 每个元素是长度为 m 的列向量。
- c. 比如: $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ 。

6. Unit Vector: 在 $\mathbb{R}^m$ 中,

$$e_1, e_2, \dots, e_m$$

- a. 第 i 个位置是 1, 其余全是 0。
- b. 比如在 $\mathbb{R}^3$ 中:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7. 为什么 Unit Vector 很重要: 因为它们构成 standard basis, 并且任何向量都可以写成 linear combination 的形式。

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_m e_m$$

Reduced Echelon Form (RREF)

8. RREF 的要求

- a. 每个 leading entry (主元) 是 1。
- b. 每个主元所在列其他元素为 0。
- c. 主元从上到下向右移动 (像楼梯)。
- d. 没有全零行。

Lecture 1: Some Definitions and Examples in the Linear Programming Problem

Translating Our Problem

1. 故事情节：农场主每天要喂牛群，必须满足最低营养需求

- a. 营养 A：至少 60 units
- b. 营养 B：至少 84 units
- c. 营养 C：至少 72 units

可以买两种饲料：

- d. F_1 ：每磅含 $A = 3, B = 7, C = 3$ ，价格 10 cents/磅
- e. F_2 ：每磅含 $A = 2, B = 2, C = 6$ ，价格 4 cents/磅

决策：每天买多少磅各饲料，使得营养达标且总成本最小。

2. Definition 1 — Decision Variables

- a. Decision Variables 的定义：Decision Variables 是模型中由我们选择或控制的未知量，也就是我们要知道和计算的 variables。
- b. 在本题中，我们可以设

$$\begin{cases} x_1 = \text{购买 } F_1 \text{ 的磅数} \\ x_2 = \text{购买 } F_2 \text{ 的磅数} \end{cases}$$

并且，很显然 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ 。

3. Definition 2 — Objective Function

- a. Objective Function 的定义：Objective Function 是一个关于 Decision Variables 的函数，用来表示我们要优化（最大化或最小化）的目标。
- b. 在本题中，我们想要最小化总成本，因此我们的 Objective Function 是

$$C(x_1, x_2) = 10x_1 + 4x_2$$

我们的目标是

$$\min 10x_1 + 4x_2$$

4. Definition 3 — Constraints

- a. Constraints 的定义：Constraints 是对 Decision Variables 施加的限制条件，通常用等式或不等式表示，描述必须满足的要求。
- b. 在本题中，我们本质上就是需要考虑营养需求

- i. A 的需求： $3x_1 + 2x_2 \geq 60$;
- ii. B 的需求： $7x_1 + 2x_2 \geq 84$;
- iii. C 的需求： $3x_1 + 6x_2 \geq 72$;
- iv. Non-negativity constraints: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ 。

5. 完整的 LPP：在本题设定下，完整的 LPP 就是

$$\min 10x_1 + 4x_2 \quad \text{s. t.}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 60 \\ 7x_1 + 2x_2 \geq 84 \\ 3x_1 + 6x_2 \geq 72 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Feasible Region and Solving the LPP

6. Feasible Region

a. 定义：所有满足约束的点 (x_1, x_2) 构成集合，叫 feasible region。而由于 $x_1, x_2 \geq 0$ ，因此 feasible region 一定在第一象限。

b. 如何在图里画出和找到 Feasible Region

i. Step 1: 把每个“ $\geq$ ”约束画成一条边界线

1. 先把 Constraints 写成等式

$$L_1: 3x_1 + 2x_2 = 60$$

$$L_2: 7x_1 + 2x_2 = 84$$

$$L_3: 3x_1 + 6x_2 = 72$$

2. 写成斜截式（方便看斜率）

$$L_1: x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 30$$

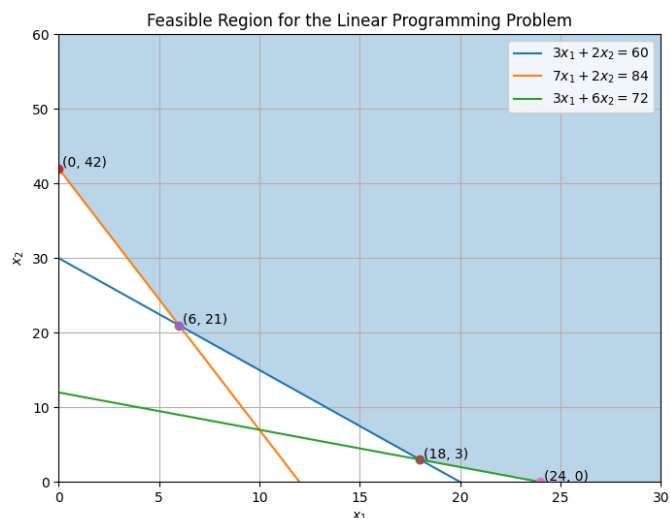
$$L_2: x_2 = -\frac{7}{2}x_1 + 42$$

$$L_3: x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 12$$

ii. Step 2: “ $\geq$ ”到底是线的哪一侧？

1. Feasible Region 不包含原点，而是在直线的另一侧。对于这种 negative slope 直线，满足“ $\geq$ ”的一侧就是“在线的上方（或更远离原点的一侧）”。

2. 本题的 Feasible Region 如下



c. Feasible Region 的 Vertices

i. 线性规划的几何核心：最优解要么在顶点，要么在一整段边上（多重最优）。

ii. 因此我们先计算几条线的交点

1. 交点 1:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 60 \\ 7x_1 + 2x_2 = 84 \end{cases} \Rightarrow 4x_1 = 24 \Rightarrow x_1 = 6$$
$$3 \cdot 6 + 2x_2 = 60 \Rightarrow 18 + 2x_2 = 60 \Rightarrow x_2 = 21$$
$$P_{1,2} = (6, 21)$$

2. 交点 2:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 60 \\ 3x_1 + 6x_2 = 72 \end{cases} \Rightarrow 4x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 3$$
$$3x_1 + 6 = 60 \Rightarrow x_1 = 18$$
$$P_{1,3} = (18, 3)$$

3. 交点 3:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 = 84 \\ 3x_1 + 6x_2 = 72 \end{cases} \Rightarrow (10, 7)$$

但是 (10,7) 不满足 L_1 的约束 ($3x_1 + 2x_2 \geq 60$)

$$3(10) + 2(7) = 44 < 60$$

所以 (10,7) 是 infeasible 的。

4. 坐标轴上的顶点

a. 在 $x_1 = 0$ 上：三个约束给出 $x_2 \geq 30, 42, 12$ ，所以最小可行点是 (0, 42)。

b. 在 $x_1 = 0$ 上：三个约束给出 $x_2 \geq 20, 12, 24$ ，所以最小可行点是 (24, 0)。

iii. 我们的结论

$$(0, 42), (6, 21), (18, 3), (24, 0)$$

7. Iso-Cost lines: 我们如何才能找到最优?

a. Iso-Cost lines: 就是把 Objective Function 的目标值设置为常数 C, 求出 Iso-Cost lines 和对应的斜率。

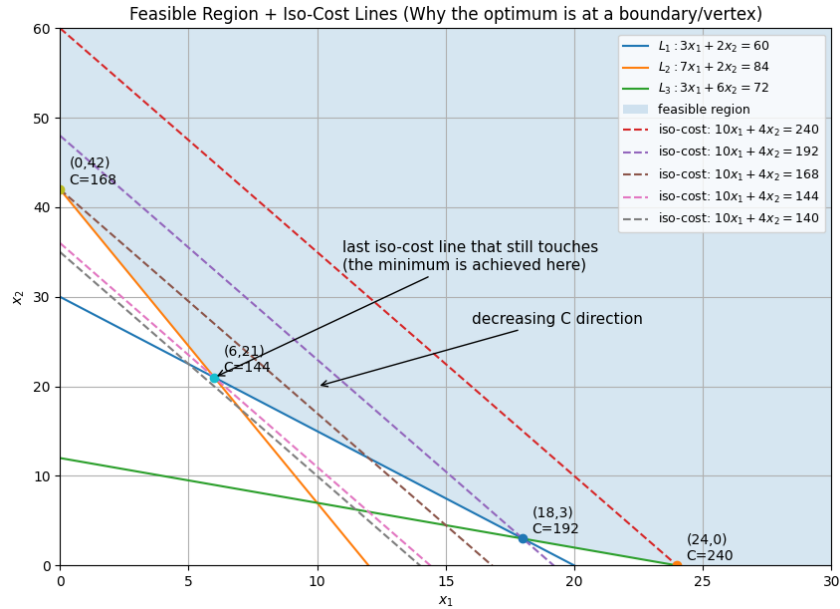
b. 在本题中

$$10x_1 + 4x_2 = C \Rightarrow x_2 = -\frac{10}{4}x_1 + \frac{C}{4} = -\frac{5}{2}x_1 + \frac{C}{4}$$
$$m = -\frac{5}{2}$$

c. 如何找到最优?

i. Iso-Cost lines 往左下推就是在减少成本。

- ii. 最优会出现在边界/顶点：如果 (x_1, x_2) 在可行域内部，你总能沿着“让成本下降的方向”（大致向左下）走一小步，还保持可行，同时让 $10x_1 + 4x_2$ 变小，所以内部点不可能最优。
- d. 方法 1 — 等成本线画图法：我们可以画出等成本线的图。最后接触 Feasible Region 的那条 Iso-Cost lines 就是最优的 Iso-Cost line。



你看图里几条等成本线：

- i. $C=240$ 还能穿过可行域；
 - ii. $C=192$ 还能穿过；
 - iii. $C=168$ 还能穿过；
 - iv. $C=144$ 仍然还能碰到可行域（恰好在 $(6, 21)$ 接触）；
 - v. 但 $C=140$ 已经完全在可行域外面了（碰不到蓝色区域）。
- e. 方法 2 — 等成本线法
- i. 定义：在一个 feasible vertex V ，设该点处的两条 active constraints 构成可行域的边界边（edges）。如果目标函数的等成本线斜率夹在这两条边的斜率之间，则在该点无法沿可行方向继续降低目标函数值，因此该点为最优解。
 - ii. 如何计算
 1. 计算 Iso-Cost lines 斜率： $m = -\frac{5}{2}$ 。
 2. 计算所有约束线斜率： $m_1 = -\frac{3}{2}, m_2 = -\frac{7}{2}, m_3 = -\frac{1}{2}$ 。
 3. $x_1 = 0$ 和 $x_2 = 0$ 这两个约束的斜率： $m_0 = +\infty, m_4 = 0$ 。
 4. 按大小排序

$$+\infty > 0 > -\frac{1}{2} > -\frac{3}{2} > -\frac{5}{2} > -\frac{7}{2}$$

5. 找到被 Iso-Cost lines 斜率包围的两条线的斜率，这两条线的

交点就是最优解。这里就是 $m_1 = -\frac{3}{2}$ 和 $m_2 = -\frac{7}{2}$ 的交点。

f. 方法 3 — 顶点枚举法（最终用这个验证）：把所有 Vertices 代入目标函数，最符合 objective 的那个点就是。

i. 在本题中，我们可得

$$(0,42): C = 10(0) + 4(42) = 168$$

$$(6,21): 10(6) + 4(21) = 144$$

$$(18,3): 10(18) + 4(3) = 192$$

$$(24,0): 10(24) = 240$$

ii. 因此我们可得， $\min C = 144$ at $(6,21)$ 。

8. 如果 Iso-Cost lines 斜率和约束边界平行怎么办？

a. Example: 把 F_1 的单价从 10 cents 提到 14 cents

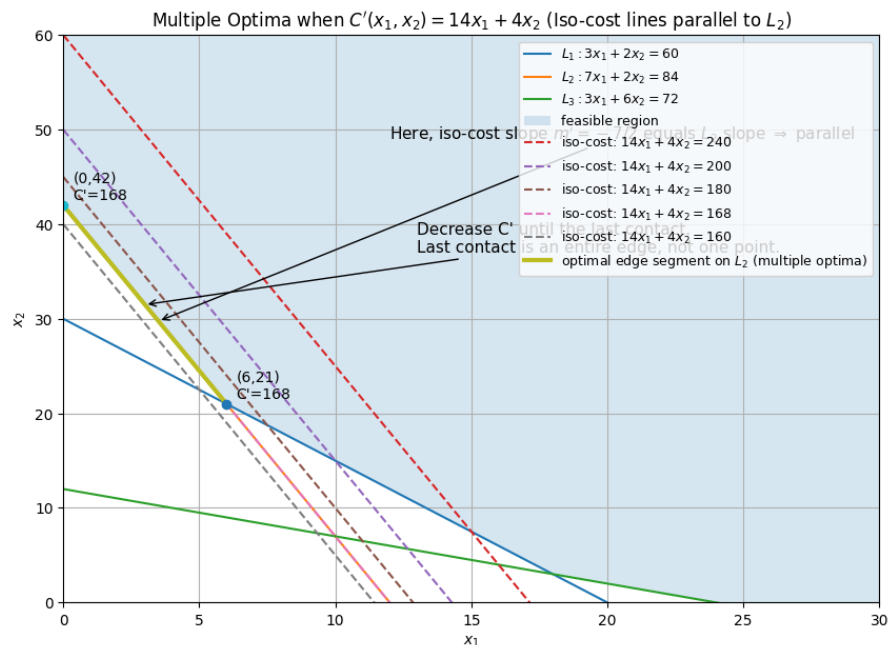
$$C'(x_1, x_2) = 14x_1 + 4x_2$$

$$m' = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2}$$

这恰好等于 L_2 的斜率 $m_2 = -\frac{7}{2}$ 。

b. 这意味着：当我们把 Iso-Cost line 往左下推到“最后接触”时，它不是碰到一个点，而是沿着 L_2 的某一段边界整段贴住可行域。

c. 所以连线段上每个点成本都一样 $\Rightarrow$ 无穷多个最优解。



Second Example of LPP

9. 背景信息：你是一个生产商，需要做一种最终产品（比如饲料、化学混合物等）。我们要用 2 个原料来混合。我们的目标是用这两种原料混出一个满足质量要求的产品，同时成本最低。

原料	G1 含量	G2 含量	价格
B_1	60%	10%	\$0.8 / 磅
B_2	20%	50%	\$0.6 / 磅

你生产出来的“最终混合物”必须满足：

- 至少 30% 是 G1；
- 至少 26% 是 G2。

10. 转化为数学语言/求解

- Decision Variables：设

$$\begin{cases} x_1 = \text{使用 } B_1 \text{ 的磅数} \\ x_2 = \text{使用 } B_2 \text{ 的磅数} \end{cases}$$

- Constraints：我们假设 $x_1 + x_2 = 100$ ，这样所有的约束都会变成线形表达式，而我们只是为了找比例，不在意重量。

- $60\%(x_1) + 20\%(x_2) \geq 30\%(x_1 + x_2) = 30 \rightarrow 3x_1 + x_2 \geq 150 (L_1)$
- $10\%(x_1) + 50\%(x_2) \geq 26\%(x_1 + x_2) = 26 \rightarrow x_1 + 5x_2 \geq 260 (L_2)$
- $x_1 + x_2 = 100 (L_3)$

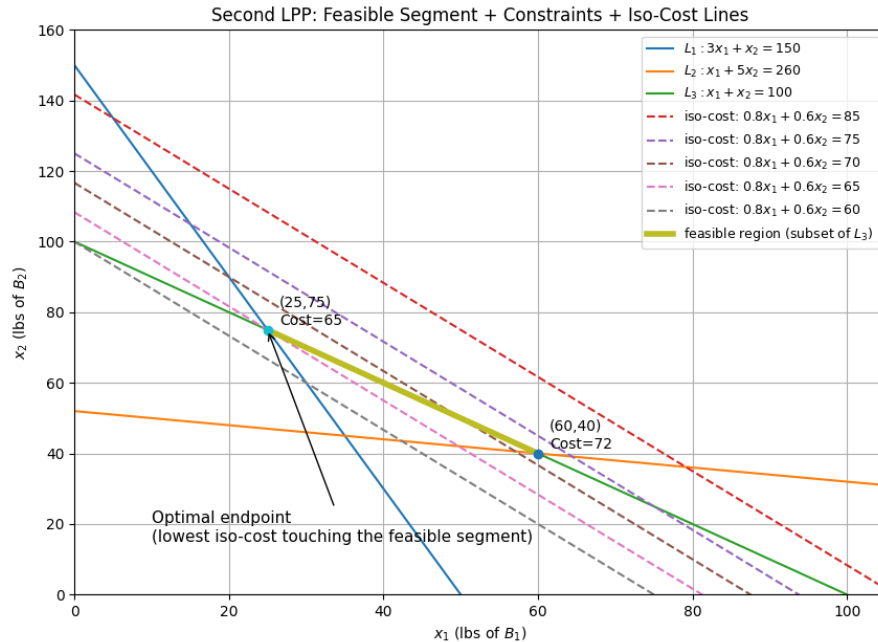
- Objective 与等成本线斜率

$$\begin{aligned} \min C'(x_1, x_2) &= 0.8x_1 + 0.6x_2 \\ 0.8x_1 + 0.6x_2 &= C \Rightarrow x_2 = -\frac{0.8}{0.6}x_1 + \frac{C}{0.6} \Rightarrow m = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

- 计算 Constraints 斜率（把 x_1 当 x ）

- $L_1: 3x_1 + x_2 = 150 \rightarrow x_2 = -3x_1 + 150 \rightarrow m_1 = -3$
- $L_2: x_1 + 5x_2 = 260 \rightarrow 5x_2 = -x_1 + 260 \rightarrow x_2 = -\frac{1}{5}x_1 + 52 \rightarrow m_2 = -\frac{1}{5}$
- $L_3: x_1 + x_2 = 100 \rightarrow x_2 = -x_1 + 100 \rightarrow m_3 = -1$

- Feasible Region 本质上是在 $x_1 + x_2 = 100$ 线上。



f. 寻找 Vertices

i. L_1 和 L_2

1. 计算得出结果: (35, 45)
2. 检查是否在 feasible region, 不在 $x_1 + x_2 = 100$ 线上。

ii. L_1 和 L_3

1. 计算得出结果: (25, 75)
2. 检查是否在 feasible region, 成功。

iii. L_2 和 L_3

1. 计算得出结果: (60, 40)
2. 检查是否在 feasible region, 成功。

iv. 我们没有坐标轴端点了, 因为其不在 feasible region 中。

g. 等成本线法找 optimal

i. 我们有的斜率: $m_1 = -3, m_2 = -\frac{1}{5}, m_3 = -1, m = -\frac{4}{3}$

ii. 排序结果

$$-\frac{1}{5} > -1 > -\frac{4}{3} > -3$$

说明目标斜率夹在 L_1 与 L_3 之间, 最优点位于(25, 75)。

h. 通过顶点枚举法验证

$$C'(25, 75) = 0.8 \cdot 25 + 0.6 \cdot 75 = 20 + 45 = 65$$

$$C'(60, 40) = 0.8 \cdot 60 + 0.6 \cdot 40 = 48 + 24 = 72$$

因此最优就是(25, 75)。

Third Example of LPP (整数版本操作过程)

11. 背景信息：一家家具店在一个生产周期内要生产两种产品：

a. Chair (椅子)：每把利润 \$70

b. Sofa (沙发)：每个利润 \$60

但生产受到三类资源限制：

c. Fabric (布料)：总共 96 yards

d. Wood (木材)：总共 90 units

e. Labor (人工)：总共 120 hours

产品	布料 Yards	木材 Units	人工 Hours
Chair	3	6	9
Sofa	8	5	4

目标：在不超过资源的前提下，使总利润最大。

12. 转化为数学语言/求解 (正常做法/连续 LP 解法)

a. Decision Variables：设

$$\begin{cases} x_1 = \text{生产 chairs 的数量} \\ x_2 = \text{生产 sofas 的数量} \end{cases}$$

b. Constraints：我们看到是资源上限，因此是 $\leq$

i. 布料： $3x_1 + 8x_2 \leq 96$ (L_1)

ii. 木材： $6x_1 + 5x_2 \leq 90$ (L_2)

iii. 人工： $9x_1 + 4x_2 \leq 120$ (L_3)

iv. Non-negativity constraints: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

c. Objective 与等成本线斜率

$$\max P(x_1, x_2) = 70x_1 + 60x_2$$

$$P = 70x_1 + 60x_2 \Rightarrow 60x_2 = P - 70x_1 \Rightarrow x_2 = \frac{P}{60} - \frac{7}{6}x_1 \Rightarrow m = -\frac{7}{6}$$

d. 计算 Constraints 斜率 (把 x_1 当 x)

$$\text{i. } L_1: 3x_1 + 8x_2 = 96 \rightarrow 8x_2 = 96 - 3x_1 \rightarrow x_2 = 12 - \frac{3}{8}x_1 \rightarrow m_1 = -\frac{3}{8}$$

$$\text{ii. } L_2: 6x_1 + 5x_2 = 90 \rightarrow 5x_2 = 90 - 6x_1 \rightarrow x_2 = 18 - \frac{6}{5}x_1 \rightarrow m_2 = -\frac{6}{5}$$

$$\text{iii. } L_3: 9x_1 + 4x_2 = 120 \rightarrow 4x_2 = 120 - 9x_1 \rightarrow x_2 = 30 - \frac{9}{4}x_1 \rightarrow m_3 = -\frac{9}{4}$$

iv. 坐标轴边界

$$1. L_v: x_1 = 0 \text{ (y 轴)}$$

$$2. L_h: x_2 = 0 \text{ (x 轴)}$$

e. 寻找 Vertices

i. L_1 和 L_2

1. 计算得出结果: $\left(\frac{80}{11}, \frac{102}{11}\right)$

2. 检查是否在 feasible region, 我们检查 L_3 , 成功

$$9\left(\frac{80}{11}\right) + 4\left(\frac{102}{11}\right) = \frac{1128}{11} \leq 120$$

ii. L_2 和 L_3

1. 计算得出结果: $\left(\frac{80}{7}, \frac{30}{7}\right)$

2. 检查是否在 feasible region, 我们检查 L_1 , 成功

iii. L_1 和 L_3

1. 计算得出结果: $\left(\frac{48}{5}, \frac{42}{5}\right)$

2. 检查是否在 feasible region, 我们检查 L_2 , 失败

iv. L_v 和 L_H

1. 计算得出结果: (0,0), 成功

v. L_v 和 L_1

1. 计算得出结果: (0,12), 成功

vi. L_H 和 L_3

1. 计算得出结果: $\left(\frac{40}{3}, 0\right)$, 成功

vii. 以此类推, 剩下的坐标轴交点都失败了。因此我们有

$$(0,0), (0,12), \left(\frac{80}{11}, \frac{102}{11}\right), \left(\frac{40}{3}, 0\right), \left(\frac{80}{7}, \frac{30}{7}\right)$$

f. 我们计算 profit, 会发现 $\left(\frac{80}{11}, \frac{102}{11}\right)$ 达到了最大利润, 但是我们无法生产出这样的产品, 因为 x_1 和 x_2 必须是整数。

13. 整数解法

a. Step 0: 先写清楚整数版问题

$$\begin{aligned} \max P &= 70x_1 + 60x_2 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \leq 96 \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 90 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 120 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

b. Step 1: 枚举一个 variable, 比如我们枚举 x_1 。因为如果你让 x_1 取一个整数值, 剩下的所有约束都会变成对 x_2 的限制, 你就能直接算出 x_2 的最大可行整数。

c. Step 2: 给 x_1 找到一个区间。

i. 随便选择一个约束, 比如 $9x_1 + 4x_2 \leq 120$

ii. 因为 $x_2 \geq 0$, 所以 $4x_2 \geq 0$, 那么

$$9x_1 \leq 120 \Rightarrow x_1 \leq \frac{120}{9} = 13.\bar{3}$$

由于 $x_1 \in \mathbb{Z}$ 且 $x_1 \geq 0$, 得到

$$x_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 13\}$$

d. Step 3: 固定一个 x_1 , 把每条约束变成 x_2 的上界

i. 约束 1: $3x_1 + 8x_2 \leq 96$

$$x_2 \leq \frac{96 - 3x_1}{8} = u_1(x_1)$$

ii. 约束 2: $6x_1 + 5x_2 \leq 90$

$$x_2 \leq \frac{90 - 6x_1}{5} = u_2(x_1)$$

iii. 约束 3: $9x_1 + 4x_2 \leq 120$

$$x_2 \leq \frac{120 - 9x_1}{4} = u_3(x_1)$$

e. Step 4: 把三个上界取最小, 得到连续意义下的最大可行 x_2 。因为 x_2 要同时满足三条上界, 所以最终上界是最紧的那个:

$$b(x_1) = \min\{u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1)\}$$

f. Step 5: 加入整数性 $\rightarrow$ 用 floor 取最大可行整数 x_2

$$x_2 = \lfloor b(x_1) \rfloor$$

g. Step 6: 枚举全部 x_1 , 逐个计算候选点与利润。

x_1	$u_1(x_1)$	$u_2(x_1)$	$u_3(x_1)$	$b(x_1)$	x_2	(x_1, x_2)	P
0	12.000	18.0	30.00	12.000	12	(0,12)	720
1	11.625	16.8	27.75	11.625	11	(1,11)	730
2	11.250	15.6	25.50	11.250	11	(2,11)	800
3	10.875	14.4	23.25	10.875	10	(3,10)	810
4	10.500	13.2	21.00	10.500	10	(4,10)	880
5	10.125	12.0	18.75	10.125	10	(5,10)	950
6	9.750	10.8	16.50	9.750	9	(6,9)	960
7	9.375	9.6	14.25	9.375	9	(7,9)	1030
8	9.000	8.4	12.00	8.400	8	(8,8)	1040
9	8.625	7.2	9.75	7.200	7	(9,7)	1050
10	8.250	6.0	7.50	6.000	6	(10,6)	1060
11	7.875	4.8	5.25	4.800	4	(11,4)	1010
12	7.500	3.6	3.00	3.000	3	(12,3)	1020
13	7.125	2.4	0.75	0.750	0	(13,0)	910

h. Step 7: 得到结果

$$(x_1, x_2) = (10, 6), P = 1060$$

Lecture 2: General Form and Standard Form of Linear Programming Problem (LPP)

General Form of LPP

1. 故事情节：农场主每天要喂牛群，必须满足最低营养需求

- a. 营养 A：至少 60 units
- b. 营养 B：至少 84 units
- c. 营养 C：至少 72 units

可以买两种饲料：

- d. F_1 ：每磅含 $A = 3, B = 7, C = 3$ ，价格 10 cents/磅
- e. F_2 ：每磅含 $A = 2, B = 2, C = 6$ ，价格 4 cents/磅

决策：每天买多少磅各饲料，使得营养达标且总成本最小。

2. General Form of a LPP

- a. 标准定义：Optimize $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$, where $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, subject to

$$\begin{aligned}a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &\sim_1 b_1 \\a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &\sim_2 b_2 \\&\vdots \\a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n &\sim_i b_i \\&\vdots \\a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &\sim_m b_m\end{aligned}$$

where

- i. “optimize” is either “minimize” or “maximize”.
 - ii. All $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ and $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$.
 - iii. For each i , $1 \leq i \leq m$ and $\sim_i$ is either $\geq, \leq$ or $=$.
 - iv. For each j , $1 \leq j \leq n$ either $x_j \geq 0$ or $x_j \in \mathbb{R}$.
- b. 一些定义：
- i. Decision Variables are the unknowns that we choose or control in the model.
 - ii. The linear function $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ is called the objective function and “Optimize” is either “Minimize” or “Maximize”.
 - iii. The relation
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \sim_i b_i$$
is called the i -th constraint.
 - iv. The number of variables is n .
 - v. The number of constraints is m .
- c. Example（参考上述故事情节）：Optimize (Minimize) $10x_1 + 4x_2$, subject to

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 60 \\ 7x_1 + 2x_2 \geq 84 \\ 3x_1 + 6x_2 \geq 72 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Standard Form of LPP

3. 定义

- a. 标准定义：A LPP is in Standard Form if
 - i. “Optimize” is “Minimize”.
 - ii. Each $\sim_i$ is = (all constraints are equalities).
 - iii. For each j , $x_j \geq 0$ (all variables are non-negative).
- b. 完整数学表示：Minimize $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$
 subject to $x_j \geq 0, 1 \leq j \leq n$ and

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$
- c. 矩阵形式：It is convenient, efficient and productive to use the matrix formulation.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \bar{c}\bar{x} \\ & \text{subject to } \bar{x} \geq 0 \\ & A\bar{x} = \bar{b} \end{aligned}$$

4. 如何把 General Form 转化为 Standard Form — 三个 transformation 技术：

- a. $\leq$ —— 加 slack variable
- b. $\geq$ —— 减 surplus variable
- c. Unrestricted —— 拆成两个非负变量

$$x = x^+ - x^-, x^+, x^- \geq 0$$

5. Example 1

- a. 原问题：Minimize $Z(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$, subject to

$$\begin{aligned} 30x_1 + 100x_2 + 85x_3 &\leq 2500 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 90 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

- b. 转化为 Standard Form

- i. 对于 $30x_1 + 100x_2 + 85x_3 \leq 2500$ ，我们发现是 $\leq$ ，因此加 slack variable x_4 。

$$30x_1 + 100x_2 + 85x_3 + x_4 = 2500$$

- ii. 对于 $6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 90$ ，我们发现是 $\geq$ ，因此是减 surplus variable x_5 。

$$6x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_5 \geq 90$$

- iii. 我们获得新变量 x_4 和 x_5 。

6. Example 2

a. 原问题: Minimize $Z(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2$, subject to

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$2x_1 - x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R} \text{ (unrestricted)}$$

b. 转化为 Standard Form

i. Step 1: 我们把 x_2 用两个非负变量表示。

$$x_2 = x_2^+ - x_2^-, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0$$

ii. Step 2: 代入目标函数

$$Z = 2x_1 - (x_2^+ - x_2^-) = 2x_1 - x_2^+ + x_2^-$$

iii. Step 3: 代入约束

$$1. \text{ 约束 1: } x_1 + x_2 \geq 3 \Rightarrow x_1 + (x_2^+ - x_2^-) \geq 3$$

$$2. \text{ 约束 2: } 2x_1 - x_2 \leq 4 \Rightarrow 2x_1 - (x_2^+ - x_2^-) \leq 4 \Rightarrow 2x_1 - x_2^+ + x_2^- \leq 4$$

iv. Step 4: 把不等式转成等式 (slack / surplus)

$$\text{Minimize } Z(x_1, x_2^+, x_2^-, s_1, s_2) = 2x_1 - x_2^+ + x_2^-$$

$$\text{subject to } x_1 + x_2^+ - x_2^- - s_1 = 3$$

$$2x_1 - x_2^+ + x_2^- + s_2 = 4$$

$$x_1, x_2^+, x_2^-, s_1, s_2 \geq 0$$

7. 重要定义: 任何线性规划都可以在不改变解的情况下转化为 Standard Form

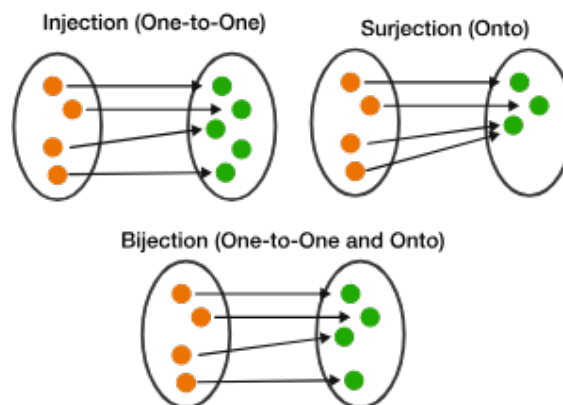
a. 转换前后:

i. 可行解一一对应

ii. 目标函数值相同

iii. 最优解完全一致

b. 本质上是一个 bijection (双射)



c. Example (Minimize $Z(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$)

i. 原问题: (12, 10, 4)

1. 满足约束

$$2. Z = 36 + 20 + 16 = 72$$

ii. 对应到新变量

$$x_4 = 2500 - 1700 = 800$$

$$x_5 = 104 - 90 = 14$$

我们得到 (12,10,4,800,14)

iii. 标准形式 → 原问题

1. 反过来(12,10,4,800,14), 可以满足约束。

2. 投影回(12,10,4), 同样成立。

Feasible / Feasible Region

8. Recall:

a. Standard Form of LPP 是

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \bar{c}\bar{x} \\ & \text{subject to } \bar{x} \geq 0 \\ & A\bar{x} = \bar{b} \end{aligned}$$

b. 例子 (饲料问题 → Standard Form)

i. 原问题

$$\begin{aligned} & \min 10x_1 + 4x_2 \\ & \text{s.t. } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 60 \\ 7x_1 + 2x_2 \geq 84 \\ 3x_1 + 6x_2 \geq 72 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ii. Standard Form of LPP

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - s_1 = 60 \\ 7x_1 + 2x_2 - s_2 = 84 \\ 3x_1 + 6x_2 - s_3 = 72 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

iii. 我们写出矩阵形式

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5, c = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ A &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 60 \\ 84 \\ 72 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

9. 定义 S : 先只看等式系统 $Ax = b$

a. 定义: We let S be the solution set of (*). Technically speaking,

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n : a_{i1}s_1 + \dots + a_{in}s_n = b_i, \forall i\}$$

也就是矩阵形式

$$S = \{\bar{s} \in \mathbb{R}^n: A\bar{s} = \bar{b}\}.$$

b. Example: 饲料问题的 S

$$S = \left\{ (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^5: \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 - s_1 = 60 \\ 7x_1 + 2x_2 - s_2 = 84 \\ 3x_1 + 6x_2 - s_3 = 72 \end{array} \right\}.$$

c. 定义 $S^\geq$: 把非负限制加进去

$$S^\geq \stackrel{def}{=} \{\bar{s} \in S: s_j \geq 0, \forall j\}.$$

$S^\geq$ = 同时满足

- i. 等式系统 $Ax = b$
- ii. 非负限制 $x \geq 0$
- iii. 这就是标准形式 LP 的“合法解空间”。

d. Example: 饲料问题的 $S^\geq$

$$S^\geq = \left\{ (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^5: \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 - s_1 = 60 \\ 7x_1 + 2x_2 - s_2 = 84 \\ 3x_1 + 6x_2 - s_3 = 72 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{array} \right\}.$$

这就是这道题的 feasible region。

10. Feasible Solutions / Feasible Region / Feasible LPP

a. 定义

- i. Elements of $S^\geq$ are called “feasible solutions of (*)”. (Feasible Solution 就是 $S^\geq$ 里的一个点。)
- ii. $S^\geq$ is called the “feasible region of (ℓ)”. (Feasible Region 就是集合 $S^\geq$ 本身。)
- iii. and (ℓ) is said to be a feasible LPP if $S^\geq \neq \emptyset$. (如果 $S^\geq \neq \emptyset$, 则为 Feasible LPP。)

b. Example: 我们随便挑一个满足原不等式的 (x_1, x_2) , 例如

$$x_1 = 12, x_2 = 12$$

检查原不等式

- i. $3(12) + 2(12) = 36 + 24 = 60 \geq 60$
- ii. $7(12) + 2(12) = 84 + 24 = 108 \geq 84$
- iii. $3(12) + 6(12) = 36 + 72 = 108 \geq 72$

对应到标准形式的 surplus:

$$\begin{aligned} s_1 &= 3x_1 + 2x_2 - 60 = 0 \\ s_2 &= 7x_1 + 2x_2 - 84 = 24 \\ s_3 &= 3x_1 + 6x_2 - 72 = 36 \end{aligned}$$

所以点:

$$(12,12,0,24,36) \in S^{\geq}$$

因此它是一个 feasible solution; 而所有这样的点组成的集合就是 feasible region。并且因为我们已经找到了一个点, 所以 $S^{\geq} \neq \emptyset$, 本题是 feasible LPP。

如何解 Standard Form LPP

11. Solving (ℓ)

- a. 我们之前已经了解了 Standard Form LPP 的标准定义, 了解了有关 Solution 的定义。现在我们要了解如何 solve Standard Form LPP。
- b. Step 1: 先判断 $S^{\geq}$ 是否为空
 - i. 如果可行域空: infeasible, 问题无解 (在约束下没有任何合法点)。
 - ii. 如果可行域不为空, 我们继续, 也就是其是一个 Feasible LPP。
- c. Step 2:
 - i. 情况一: 存在最优解, 也就是我们要 find $\bar{s}_{min} \in S^{\geq}$ satisfying for $\bar{c}\bar{s}_{min} \leq \bar{c}\bar{s}$ every $\bar{s} \in S^{\geq}$, 数学形式化写法就是

$$x^* \in S^{\geq} \text{ s.t. } c^T x^* \leq c^T x, \forall x \in S^{\geq}.$$
 这就是“解”这个 LP 的精确定义。
 - ii. 情况二: no such $\bar{s}_{min}$ exists, 也就是虽然可行, 但目标函数没有最小值。该情况叫做 Not Bounded Below。

12. Not Bounded Below

- a. 定义: A feasible Standard Form lpp for which $\bar{s}_{min}$ does not exist is said to be “Not Bounded Below”.
 - i. $S^{\geq} \neq \emptyset$
 - ii. 但不存在最小点
 - iii. 目标函数可以趋向 $-\infty$
- b. Example: 现在有一个 Standard Form LPP

$$\begin{aligned} \min Z(x_1, x_2) &= x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t. } x_1, x_2 &\geq 0 \\ -x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

- i. Step 1: 求 S 。

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: -x_1 + x_2 = 2\}$$

我们也可以写成参数形式 parametric representation: 由 $-x_1 + x_2 = 2$ 可得, $x_1 = x_2 - 2$ 。我们设 $x_2 = t$, 得到 $(x_1, x_2) = (t - 2, t)$ 。因此

$$S = \{(t - 2, t): t \in \mathbb{R}\}$$

- ii. Step 2: 求 $S^{\geq}$ 。

我们要求 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, 代入可得 $t - 2 \geq 0 \rightarrow t \geq 2$ 。

$$S^{\geq} = \{(t - 2, t) : t \geq 2\}$$

iii. Step 3: 说明 feasible。因为 $t = 2 \Rightarrow (0, 2) \in S^{\geq}$, 所以 $S^{\geq} \neq \emptyset$ 。这是一个 Feasible LPP。

iv. Step 4: 看目标函数。

$$Z(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$$

因此:

$$Z(t) = (t - 2) - 2t = -2 - t$$

v. Step 5: 关键分析。我们发现当 $t \rightarrow \infty$ 的时候, $Z(t) \rightarrow -\infty$ 。这 feasible, 但是不存在 s_{min} 。

13. Minimum Value and Minimum Point

a. 定义: A minimum point is any point that results in the minimum value.

b. 正常情况下 (非 NBB)

i. minimum value 是唯一的

ii. minimum point 可能多个 (例如一条边)

c. 但是比如

$$\min Z = x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 = 4, x \geq 0$$

这个时候所有点都有 $Z = 4$, 所以 minimum value = 4 (唯一), minimum point = 无穷多个。

14. 如何解 LPP?

a. 我们之前已经有很多 examples 告诉我们如何手动解 LPP, 但是这只用于低维, 也就是能画图, 顶点少的情况。但是一旦 100 个变量, 200 个约束。我们就做不了了。

b. 我们需要把“找顶点”的过程变成一个系统算法, 这个算法就叫做 simplex。

Lecture 3: Simplex Algorithm and Solving the Standard Form LPP

Pivoting

1. 如何 Solve a Standard Form LPP

- a. 表达方法切换：使用 matrix formulation 来表达 Standard Form LPP。

$$(\ell') \quad \min Z(x) = \bar{c}\bar{x} \quad \text{s.t.} \quad \bar{x} \geq \bar{0}, A'\bar{x} = \bar{b}'$$

- b. 解 Standard Form LPP 的方法叫做 Simplex Algorithm, 其是 made up of a sequence of steps called 'pivoting' operations。

2. Pivoting

a. Notation and Concepts

1. Pivot Position: 首先我们需要寻找/确定一个 Pivot Position, 我们用 (r, c) 表示, 这是第 r 行第 c 列第位置。
2. Pivot: 该位置的数 a_{rc} , 要求非 0。
3. Pivot Row: 第 r 行。
4. Pivot Column: 第 c 列。

b. Pivoting 的过程

1. Step 1: 让 pivot 变成 1 (归一化 pivot row)。

$$R_r \leftarrow \frac{1}{a_{rc}} R_r$$

2. Step 2: 用这个 1 把 pivot column 的其它元素都消成 0。

$$R_i \leftarrow R_i - a_{ic} R_r$$

3. 完成后, pivot column 会变成一个“单位列”: 第 r 行是 1, 其他行是 0。

- c. Pivoting 不改变解集: 因为这两步都是初等行变换 (Gauss-Jordan row operations)。对等式系统 $Ax = b$ 来说, 做初等行变换得到的是一个等价系统, 解集完全相同

$$\{x: Ax = b\} = \{x: A'x = b'\}$$

d. Example

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

1. Step 0: 写成增广矩阵

$$[A: b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \end{array} \right]$$

2. Step 1: 选 pivot position $(r, c) = (1, 1)$ (第一行第一列的 1)。

1. Step (i): 让 pivot 变 1。目前本身就是 1, 所以不变。

2. Step (ii): 消掉 pivot column 的其它元素 (把第 2 行第 1 列的 2 消成 0)。

$$R_2 = [2, 1, 3 | 7] - [2, 4, 2 | 8] = [0, -3, 1 | -1]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & -3 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

3. Step 2: 选 pivot position (2, 2) (第二行第二列的 -3)

1. Step (i): 归一化 pivot row (让 pivot 变 1)

$$R_2 \leftarrow \frac{1}{-3} R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & | & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

2. Step (ii): 用这个 1 消掉 pivot column 的其它元素 (把第一行第二列的 2 消成 0)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} & | & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & | & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Simplex 到底在干什么

3. Canonical Form of an LPP

- a. 定义: $A\bar{x} = \bar{b}$ is in Canonical Form with basis $B = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_m}\}$, if the columns of A indexed by $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}$ are the m unit vectors $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_m$ of $\mathbb{R}^m$ in some order.
- b. 解读: 存在一组变量 $B = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_m}\}$, 使得 它们在矩阵 A 里的列 = 单位向量。也就是说

$$A[:, j_1], A[:, j_2], \dots, A[:, j_m] = e_1, e_2, \dots, e_m$$

换句话说, canonical form = 在 A 的列中找到 m 列组成单位矩阵 (一个 $m \times m$ 的结构)。

c. Example

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 我们可以选 $B = \{x_1, x_2\}$, 这两列就是 $B = \{x_1, x_2\}$, 因为这两列可以组成单位矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。
2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 这不是 canonical form, 因为没有任何一组列可以组成 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, 我们可以选 $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ 。这三列就是 I_3 , 因此是 canonical form。

4. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 这也是 canonical form。

4. Pivoting 用法——Pivoting 可以改变矩阵, 使其变成 Canonical Form

a. 目标: 线性代数操作, 造单位矩阵。

b. Example: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & | & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 8 & | & 3 \end{bmatrix}$

1. Step 1: 判断 canonical form, 这不是 canonical form。

2. Step 2: 进行 pivoting。

3. Step 2.1: 选择 pivot position, 为 (row x_2 , col x_2)

4. Step 2.2: 进行 pivoting

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/3 & -5/3 & | & 5 \\ 0 & 1 & 1/3 & 8/3 & | & 1 \end{bmatrix}$$

5. Basic Solution

a. 定义:

1. The m variables $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}$ are called basic variables.

2. When the system $A\bar{x} = \bar{b}$ is in canonical form with basis $B = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}\}$. The associated basic solution is the element of S $\bar{s}_B = (s_1, s_2, \dots, s_m)$ satisfying

1. $s_j = 0$ for $j \notin \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$. (all non-basic variables are set equal to 0).

2. For $j \in \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$, s_{j_i} = the right hand number in the row indexed by x_{j_i} .

b. 解读: Basic Solution 就是这样一个向量 x , 保证

1. 所有非基变量设为 0

$$x_j = 0 \text{ for } j \notin B$$

2. 基变量直接由方程解出

$$x_{j_i} = b_i$$

c. Example: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

1. Step 1: 判断 canonical form, 选 $B = \{x_1, x_2\}$ 。

2. Step 2: 构造 Basic Solution。

1. Non-basic variables: $x_3 = 0$

2. 代入方程可以得到

$$\begin{cases} x_1 + 2(0) = 4 \\ x_2 + 3(0) = 5 \end{cases}$$

我们得到 $x_1 = 4, x_2 = 5$, 最终 basic solution

$$x = (4, 5, 0)$$

6. Basic Feasible Solution

- 定义: If $\bar{s}_B \in S^{\geq}$, then $\bar{s}_B$ is called a Basic Feasible Solution.
- 解读: 如果这个 basic solution 刚好也满足 $x \geq 0$, 那其就是 Basic Feasible Solution。
- Example
 - $x = (3, 0, 0, -7)$, 不是 Basic Feasible Solution。
 - $x = (0, 3, 7, 0, 2)$, 是 Basic Feasible Solution。

7. Pivoting 用法二 — Pivoting 可以改变 basis, 尝试得到 Basic Feasible Solution

- Example:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 & 29 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -11 \end{array} \right]$$

- Step 1: 判断 canonical form。选

$$B = \{x_1, x_2\}$$

- Step 2: 读 basic solution。

- $x_3 = x_4 = 0$
- $x_1 = 29, x_2 = -11$

$$\bar{s}_B = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (29, -11, 0, 0)$$

- Step 3: 判断是否 feasible。这里 $x_2 = -11 < 0$, 因此不 feasible。
- Step 4: 通过 pivoting 将其变 feasible。
- Step 4.1: 找到 pivot position。

- 我们找“负+负”。负的 basic variable 对应的那一行 (这里是 $x_2 = -11$) 的负的 element (这里 -1 和 -5 都可以)。
- 因此我们这里使用

$$(\text{row } x_2, \text{col } x_3)$$

- Step 4.2: 开始 pivoting。

- 把 pivot 元素变成 1 (原来是 -1)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 & 29 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -11 \end{array} \right]$$

- 用这个“1”消掉 pivot 列在其它行的数 (让整列除了 pivot 位置全为 0)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & 11 \end{array} \right]$$

- Step 5: 判断 canonical form。选

$$B = \{x_1, x_3\}$$

8. Step 6: 从 pivot 后的矩阵读出新的 basic solution

$$\bar{s}_{B'} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (7, 0, 11, 0)$$

它是一个 Basic Feasible Solution (BFS)。

8. Pivoting 的过程中, Z (目标函数) 表达式必须更新

a. 目标: Pivoting 的过程中, 我们希望把 Z 写成只用 non-basic variables 表达的 current expression。

b. 为什么非要把 Z 写成“只含 non-basic variables”

1. 因为在 canonical form 下, 我们把 non-basic variables 设为 0 得到 BFS。你想从这个 BFS “走出去”去寻找更小的 Z, 你唯一能主动调的自由度就是让某个 non-basic variable 从 0 开始增大 (entering)。

2. 所以我们必须知道: 每个 non-basic variable 增大一点点, 会让 Z 怎么变化。而这恰好由 canonical form 的 Z 表达式提供。

c. 方法: 把 Z 当作一行加入增广矩阵 (Tableau 形式, 或者叫 hyper augmented matrix)。比如

$$\min Z = x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4$$

subject to

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_2 + x_3 + 8x_4 = 3 \end{cases} \quad x_j \geq 0$$

现在写成增广矩阵:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 8 & 3 \end{array} \right]$$

现在把 Z 也写进去: $Z = x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4$

1	1	2	1	6
0	3	1	8	3
1	-1	2	-5	Z

i. Step 1: 选 pivot/把 pivot 变成 1 (在 x_2 列、第 2 行的 3)

1	1	2	1	6
0	1	1/3	8/3	1
1	-1	2	-5	Z

ii. Step 2: 把 pivot 列其它行消成 0 (包括 Z-row)

1. 消掉第一行的 x_2 系数 1: $R_1 \leftarrow R_1 - 1(R_2)$

新 R_1 :

$$[1, 0, 5/3, -5/3 | 5]$$

2. 消掉 Z-row 的 x_2 系数 -1: $R_Z \leftarrow R_Z + 1(R_2)$

$$[1, 0, 7/3, -7/3 | Z + 1]$$

1	0	5/3	-5/3	5
---	---	-----	------	---

0	1	1/3	8/3	1
1	0	7/3	-7/3	Z+1
iii. Step 3: 调整 Z-row, 保证 basis 对应的列只有一个 1。这里我们需要消除 Z-row 里的 x_1 系数: $R_Z \leftarrow R_Z - 1(R_1)$ 。				
1	0	5/3	-5/3	5
0	1	1/3	8/3	1
0	0	2/3	-2/3	Z-4

iv. Final Step: 从 tableau 读出“新的 Z 表达式”。

$$\frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 = Z - 4$$

$$Z = \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + 4$$

这就是 pivot 后的 current expression。

v. 我们可以发现

1. x_3 增大会让 Z 变大 (对 minimization 不利)。
2. x_4 增大会让 Z 变小 (对 minimization 不利)。
3. 这就是为啥我们要在 Z “只含 non-basic variables”。

9. Canonical System

a. 定义: A standard form LPP is with canonical system is in canonical form if

1. Constraints are in canonical form.
2. The associated basic solution is feasible.
3. The expression for the objective function is in terms of the non-basic variables only.

b. Example: 比如刚才那个例子, 经过 pivoting 后

1. Constraints are in canonical form: Basis $B = \{x_1, x_2\}$ and x_1, x_2 form the $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. The associated basic solution is feasible

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5, 1, 0, 0)$$

3. The expression for the objective function is in terms of the non-basic variables only: $Z = \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + 4$.

10. Pivoting 用法三 — 得到 Basic Feasible Solution 之后, “推动”我们走向最优解

a. Pivoting 的核心结论: pivot = 换一个 basis = 换一个顶点

b. 还是看之前的例子

1. 当前 BFS: (5, 1, 0, 0)
2. 我们要判断 entering variable 和 leaving variable

1. Entering variable 看目标函数: $Z = \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + 4$, 你会发现 x_4 增大会有利于我们达成 Z 最小的目标。因此 x_4 enters。

2. Leaving variable 看约束 (Ratio Test): $\begin{cases} x_1 = 5 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_2 = 1 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{8}{3}x_4 \end{cases}$,

现在只考虑 x_4 , 把 x_3 设为 0。

a. $x_1 = 5 + \frac{5}{3}x_4 \geq 0 \rightarrow x_4 \geq -3$

b. $x_2 = 1 - \frac{8}{3}x_4 \geq 0 \rightarrow x_4 \leq \frac{3}{8}$

你会发现增大 x_4 不会让 x_1 变负, 但是会让 x_2 变负数。因此 x_2 leaves。如果是同号的话, 我们选择最小 ratio 的 leave。

3. 我们换 basis: $\{x_1, x_2\} \rightarrow \{x_1, x_4\}$

4. 那我们新的 pivoting position 就是(row x_2 , col x_4)

1	0	5/3	-5/3	5
0	1	1/3	8/3	1
0	0	2/3	-2/3	Z-4

因为我们本质上是想要把 8/3 变成 1。

5. 最终 tableau:

1	5/8	15/8	0	45/8
0	3/8	1/8	1	3/8
0	1/4	3/4	0	Z-15/4

6. 我们的新 BFS 是

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{45}{8}, 0, 0, \frac{3}{8}\right)$$

整理与案例——Simplex 全过程

11. Recall: Pivoting 的作用

- Pivoting 用法一: Pivoting 可以改变矩阵, 使其变成 Canonical Form。
- Pivoting 用法二: Pivoting 可以改变 basis, 尝试得到 Basic Feasible Solution。
- Pivoting 用法三: 得到 Basic Feasible Solution 之后, “推动”我们走向最优解。

12. 下面我们通过一个完整的案例串起来之前的所有概念。案例如下

$$\begin{aligned} &\min 10x_1 + 4x_2 \\ &\text{s.t. } x_1, x_2 \geq 0, \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 60 \\ 7x_1 + 2x_2 \geq 84 \\ 3x_1 + 6x_2 \geq 72 \end{cases} \end{aligned}$$

13. Step 1: 把原问题变成 Standard Form。

a. 这里都是 $\geq$ 约束，因此我们引入 surplus variables。

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 60 \\ 7x_1 + 2x_2 - x_4 = 84 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_5 = 72 \end{cases} \quad x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5$$

$$\text{目标函数: } Z - 10x_1 - 4x_2 = 0$$

b. 写成 hyper augmented matrix。

3	2	-1	0	0	60
7	2	0	-1	0	84
3	6	0	0	-1	72
10	4	0	0	0	Z

14. Step 2: 计算 bases 数量，确定 Canonical Form，选择起点 basis，开始 pivoting
(这是为了得到 Canonical Form 以及得到 basic feasible solution 而 pivoting，也就是 pivoting 用法一和用法二)

a. 总 bases 数量: $\binom{5}{3} = 10$ 个。

b. 选择起点 basis

1. 观察 hyper augmented matrix，我们发现 $\{x_3, x_4, x_5\}$ 似乎可以构成单位矩阵。

2. 对矩阵变换，每个等式乘 -1 (Pivoting 用法一)。

-3	-2	1	0	0	-60
-7	-2	0	1	0	-84
-3	-6	0	0	1	-72
-10	-4	0	0	0	-Z

3. 这个时候，hyper augmented matrix 是 Canonical Form

$$B_1 = \{x_3, x_4, x_5\}$$

4. 判断是否要 pivoting:

1. 用法一: Pivoting 可以改变矩阵，使其变成 Canonical Form (已经完成，不再需要)

2. 用法二: Pivoting 可以改变 basis，尝试得到 Basic Feasible Solution (Basic Feasible Solution 要求 Basic Solution ≥ 0 ，此时 $\bar{s}_{B_1} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, -60, -84, -72)$ ，很明显不是 Basic Feasible Solution，因此需要 Pivoting)。

c. Pivoting 1

1. Pivot Position: 根据之前的规则，我们找“负+负”。这里我们选择最负的 -84 ，在这一行随机选一个负数，比如 -7 作为 Pivot Position。

$$(\text{row } x_4, \text{col } x_1)$$

2. 进行 Pivoting。

第二行乘 $-1/7$:

-3	-2	1	0	0	-60
1	2/7	0	-1/7	0	12
-3	-6	0	0	1	-72
-10	-4	0	0	0	-Z

用第二行把第一行和第三行变成 0。

0	-8/7	1	-3/7	0	-24
1	2/7	0	-1/7	0	12
0	-36/7	0	-3/7	1	-36
-10	-4	0	0	0	-Z

把 Z-row 第一个 element 变成 0。

0	-8/7	1	-3/7	0	-24
1	2/7	0	-1/7	0	12
0	-36/7	0	-3/7	1	-36
0	-8/7	0	-10/7	0	-Z+120

3. 新 basis 是

$$B = \{x_3, x_1, x_5\}$$

新 basic solution

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (12, 0, -24, 0, -36)$$

4. 判断是否要 pivoting:

1. 用法一: Pivoting 可以改变矩阵, 使其变成 Canonical Form (已经完成, 不再需要)
2. 用法二: Pivoting 可以改变 basis, 尝试得到 Basic Feasible Solution (Basic Feasible Solution 要求 Basic Solution ≥ 0 , 此时 $\bar{s}_{B_2} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (12, 0, -24, 0, -36)$, 很明显不是 Basic Feasible Solution, 因此需要 Pivoting)。

d. Pivoting 2

1. Pivot Position: 根据之前的规则, 我们找“负+负”。这里我们选择最负的-36, 在这一行随机选一个负数, 比如-3/7作为 Pivot Position。

$$(\text{row } x_5, \text{col } x_4)$$

2. 进行 Pivoting。

第三行乘-7/3:

0	-8/7	1	-3/7	0	-24
1	2/7	0	-1/7	0	12
0	12	0	1	-7/3	84
0	-8/7	0	-10/7	0	-Z+120

用第三行把第一行和第二行变成 0。

0	4	1	0	-1	12
---	---	---	---	----	----

1	2	0	0	-1/3	24
0	12	0	1	-7/3	84
0	-8/7	0	-10/7	0	-Z+120
把 Z-row 第四个 element 变成 0。					
0	4	1	0	-1	12
1	2	0	0	-1/3	24
0	12	0	1	-7/3	84
0	16	0	0	-10/3	-Z+240

3. 新 basis 是

$$B = \{x_3, x_1, x_4\}$$

新 basic solution

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (24, 0, 12, 84, 0)$$

新目标函数

$$16x_2 - \frac{10}{3}x_5 = -Z + 240$$

$$Z = 240 - 16x_2 + \frac{10}{3}x_5$$

4. 我们终于找到我们的 basic feasible solution $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (24, 0, 12, 84, 0)$, 要不要继续 pivoting?

1. 对于 minimization: 如果 Z-row 所有系数都 ≥ 0 , 则最优。
2. 现在 Z-row 存在 -16, 因此继续 pivoting。

15. Step 3: 继续 pivoting (为了最优而 pivoting, 这是 pivoting 用法三)

a. Pivoting 3

1. Pivot Position: 这是一个 minimization 问题

1. Entering variable 看目标函数: 增大 x_2 可以让 Z 最小。最终结论就是 entering variable 是 x_2 。
2. Leaving variable 看约束:

$$\begin{cases} 0x_1 + 4x_2 + x_3 + 0x_4 - x_5 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - \frac{1}{3}x_5 = 24 \\ 0x_1 + 12x_2 + 0x_3 + x_4 - \frac{7}{3}x_5 = 84 \end{cases}$$

把 nonbasic 移到右边:

$$\begin{cases} x_3 = 12 - 4x_2 + x_5 \\ x_1 = 24 - 2x_2 + \frac{1}{3}x_5 \\ x_4 = 84 - 12x_2 + \frac{7}{3}x_5 \end{cases}$$

现在做 ratio test: 只考虑 x_2 , 先令 $x_5 = 0$ 。

$$x_3 = 12 - 4x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 3$$

$$x_1 = 24 - 2x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 12$$

$$x_4 = 84 - 12x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 7$$

因为是同号，我们选择最小 ratio。 $\min\{3,12,7\} = 3$ 。最终结论就是 leaving variable 是 x_3 。

3. Pivot Position 就是

(row x_3 , col x_2)

2. 进行 Pivoting。

第一行乘 1/4：

0	1	1/4	0	-1/4	3
1	2	0	0	-1/3	24
0	12	0	1	-7/3	84
0	16	0	0	-10/3	-Z+240

用第一行把第二行和第三行变成 0。

0	1	1/4	0	-1/4	3
1	0	-1/2	0	1/6	18
0	0	-3	1	2/3	48
0	16	0	0	-10/3	-Z+240

把 Z-row 第二个 element 变成 0。

0	1	1/4	0	-1/4	3
1	0	-1/2	0	1/6	18
0	0	-3	1	2/3	48
0	0	-4	0	2/3	-Z+192

3. 新 basis 是

$$B = \{x_2, x_1, x_4\}$$

新 basic solution

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (18, 3, 0, 48, 0)$$

新目标函数

$$-4x_3 + \frac{2}{3}x_5 = -Z + 192$$

$$Z = 192 + 4x_3 - \frac{2}{3}x_5$$

4. 要不要继续 pivoting?

1. 对于 minimization: 如果 Z-row 所有系数都 ≥ 0 ，则最优。

2. 现在 Z-row 存在 -2/3，因此继续 pivoting。

b. Pivoting 4

1. Pivot Position: 这是一个 minimization 问题

1. Entering variable 看目标函数：增大 x_5 可以让 Z 最小。最终结论就是 entering variable 是 x_5 。

2. Leaving variable 看约束：

$$\begin{cases} 0x_1 + x_2 + \frac{1}{4}x_3 + 0x_4 - \frac{1}{4}x_5 = 3 \\ x_1 + 0x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 0x_4 + \frac{1}{6}x_5 = 18 \\ 0x_1 + 0x_2 - 3x_3 + x_4 + \frac{2}{3}x_5 = 48 \end{cases}$$

把 nonbasic 移到右边：

$$\begin{cases} x_2 = 3 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_5 \\ x_1 = 18 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{6}x_5 \\ x_4 = 48 + 3x_3 - \frac{2}{3}x_5 \end{cases}$$

现在做 ratio test：只考虑 x_5 ，先令 $x_3 = 0$ 。

$$x_2 = 3 + \frac{1}{4}x_5 \geq 0 \Rightarrow x_5 \geq -12$$

$$x_1 = 18 - \frac{1}{6}x_5 \geq 0 \Rightarrow x_5 \leq 108$$

$$x_4 = 48 - \frac{2}{3}x_5 \geq 0 \Rightarrow x_5 \leq 72$$

我们发现增大 x_5 有可能让 x_1 和 x_4 变负数，在这里我们选

$$\min(108, 72) = 72$$

因此 leaving variable 是 x_4 。

3. Pivot Position 就是

(row x_4 , col x_5)

2. 进行 Pivoting。

第三行乘 $3/2$ ：

0	1	1/4	0	-1/4	3
1	0	-1/2	0	1/6	18
0	0	-9/2	3/2	1	72
0	0	-4	0	2/3	-Z+192

用第三行把第一行和第二行变成 0。

0	1	-7/8	3/8	0	21
1	0	1/4	-1/4	0	6
0	0	-9/2	3/2	1	72
0	0	-4	0	2/3	-Z+192

把 Z-row 第五个 element 变成 0。

0	1	-7/8	3/8	0	21
1	0	1/4	-1/4	0	6
0	0	-9/2	3/2	1	72
0	0	-1	-1	0	-Z+144

3. 新 basis 是

$$B = \{x_2, x_1, x_5\}$$

新 basic solution

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (6, 21, 0, 0, 72)$$

新目标函数

$$-x_3 - x_4 = -Z + 144$$

$$Z = x_3 + x_4 = 144$$

4. 要不要继续 pivoting?

1. 对于 minimization: 如果 Z-row 所有系数都 ≥ 0 , 则最优。
2. 这里没有负数, 所以结束。

16. Step 4: 得出答案

a. Basic solution 是 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (6, 21, 0, 0, 72)$ 。

b. 我们关心 $(x_1, x_2) = (6, 21)$, 这就是最终答案。

$$Z = 10x_1 + 4x_2 = 10(6) + 4(21) = 60 + 84 + 144$$

c. 最小值是 $Z_{min} = 144$ 。

17. 总结: 解一个 standard form LPP 到底要完成哪些任务

a. 第一部分: 判断 Feasibility (先判断 $S^\geq$ 是否为空)

1. 如果可行域空: infeasible, 问题无解 (在约束下没有任何合法点)。
2. 如果可行域不为空, 我们继续, 也就是其是一个 Feasible LPP。

b. 第二部分: 看目标函数是否 NBB

1. 情况一: 存在最优解, 也就是我们要 find $\bar{s}_{min} \in S^\geq$ satisfying for $\bar{c}\bar{s}_{min} \leq \bar{c}\bar{s}$ every $\bar{s} \in S^\geq$, 数学形式化写法就是

$$x^* \in S^\geq \text{ s.t. } c^T x^* \leq c^T x, \forall x \in S^\geq.$$

这就是“解”这个 LP 的精确定义。

2. 情况二: no such $\bar{s}_{min}$ exists, 也就是虽然可行, 但目标函数没有最小值。该情况叫做 Not Bounded Below。

c. Simplex 的“两阶段”对应上面两件事

1. Phase 1: 解决 (1) —— 找到一个 basic feasible solution (这通常更难, 我们目前还没有真正定义如何在 Phase 1 确定 pivot position)。
2. Phase 2: 解决 (2) —— 从一个“好”的起点出发, 不断 pivot 改善目标值, 直到最优或判定 NBB。

d. 目前的逻辑

1. Phase 1: 找到确定 Canonical Form, 选择起点 basis, 开始 pivoting 得到 basic feasible solution.
 1. 停止条件: 得到 basic feasible solution
 2. 确定 pivot position: 就是找“负+负”。这里我们选择最负的一个 B, 在这一行随机选一个负数。
 2. Phase 2: 就是得到最优或判定 NBB.
 1. 停止条件
 - a. 对于 minimization: 如果目标函数所有系数都 ≥ 0 , 则最优。
 - b. 对于 maximization: 如果目标函数所有系数都 ≤ 0 , 则最优。
 2. Entering variable
 - a. 对 min: 挑一个 $c_j < 0$ 的非基变量进入 (能让 Z 下降)。
 - b. 对 max: 挑一个 $c_j > 0$ 的非基变量进入 (能让 Z 上升)。
 3. Ratio test and leaving variable: 把非 entering variable 设为 0, 找另一个会让某个 basic variable 变负数的 variable, 并且选择最小 ratio 的 leave。
- e. 在 Simplex 中如何判定 NBB?
1. 在 simplex / tableau 视角里, NBB 通常长这样:
 1. 你挑到了一个 entering variable 能让目标下降 (min 下对应 “reduced cost < 0 ”)。
 2. 但是你对该 entering variable 做 ratio test 时发现:
 - a. 所有相关约束都不限制它向 $+\infty$ 增长 (要么系数符号不对, 要么根本没有正系数项导致上界不存在)。
 - b. 那就意味着: 你可以让这个变量无限增大, 同时不破坏可行性, 而目标一直下降 $\Rightarrow$ NBB。

2. Example:

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_3	1	-2	1	0	1
x_4	0	-1	0	1	2
Z-row	0	-1	0	0	$-Z + 5$

1. 基本信息:
 - a. Basis: $\{x_3, x_4\}$ 。
 - b. 非基: $\{x_1, x_2\}$ 。

- c. 当前 BFS: $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 1, 2)\}$ 。
- d. 目标函数: $Z = 5 + x_2$ 。
- 2. 选 entering variable: 这里就可以看出端倪, 因为 x_2 没办法最小化 Z 。
- 3. 假设我们选 x_2 作为 entering variable, 当我们做 ratio test 时
 - a. $x_3 + x_1 - 2x_2 = 1 \Rightarrow x_3 = 1 - x_1 + 2x_2$: 令 $x_1 = 0$,

$$x_3 = 1 + 2x_2$$
 - b. $x_4 - x_2 = 2 \Rightarrow x_4 = 2 + x_2$: 令 $x_1 = 0$,

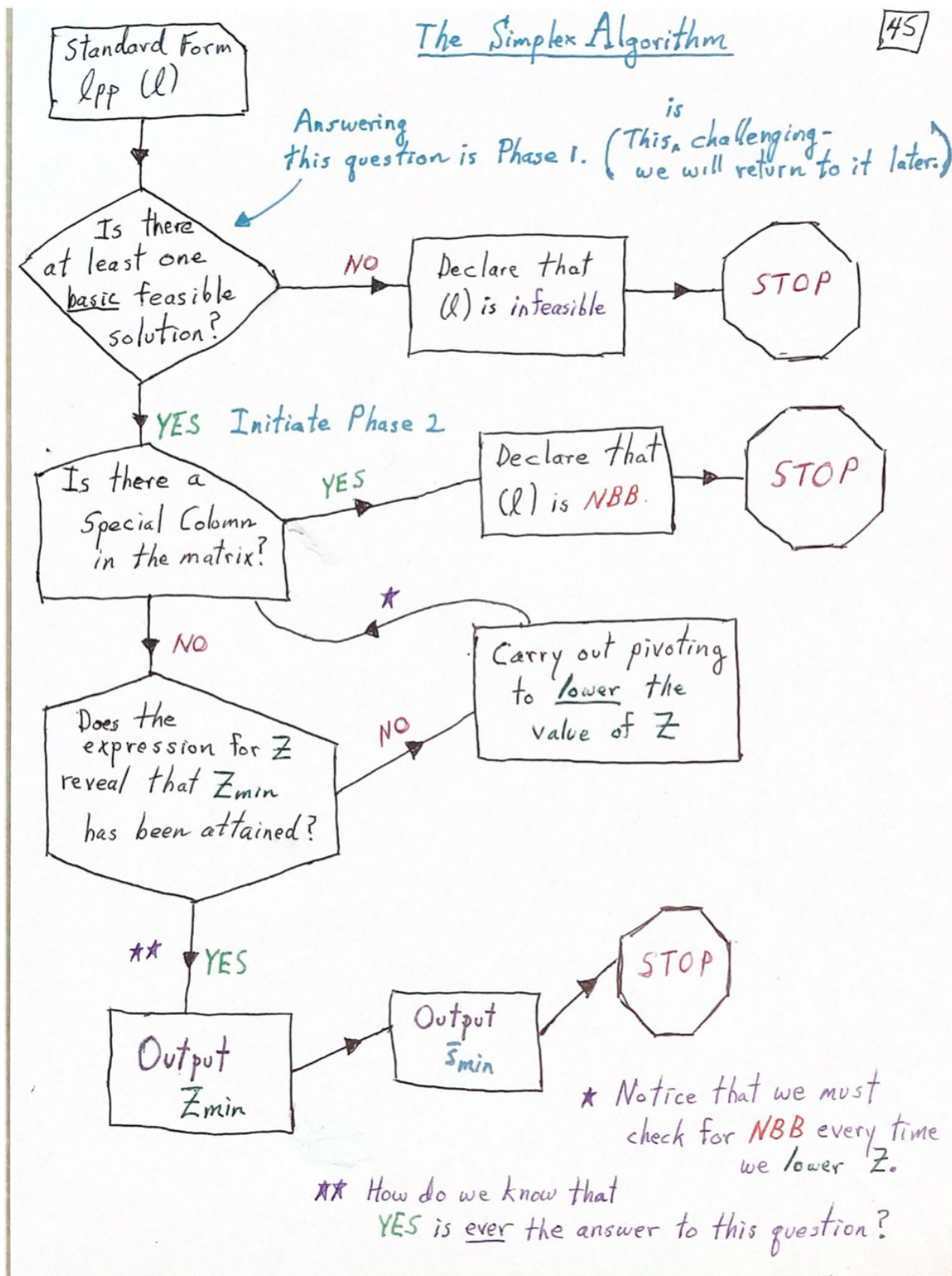
$$x_4 = 2 + x_2$$
 没有任何 basic variable 会被压到 0, 更不会变负。

Simplex 算法的其他重要细节

- 18. 不是所有 pivot 都是“好 pivot”: Simplex 的强大之处在于: 它可以避免“让 Z 变坏”的 pivot。
- 19. 可行域非空 $\Rightarrow$ 至少存在一个 BFS:

$$S \neq \emptyset \Rightarrow \exists \text{BFS}$$

Simplex 算法流程图



Lecture 4: Simplex Algorithm Phase 2 的理论部分

本节的 3 个 Theorem 都只适用于 Phase 2。

Theorem 1: Optimality Criterion

1. Example: 我们给一个有 $n = 5$ 个变量、 $m = 2$ 条约束的 canonical form (basis 取 $B = \{x_1, x_2\}$, 非基是 x_3, x_4, x_5)

a. 约束

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 4 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

注意 RHS: $b_1 = 4, b_2 = 5 \geq 0$ 。所以当前 BFS 是可行的。

b. 目标函数的 canonical 表达式 (只含非基变量)

$$Z = 7x_3 + 1x_4 + 4x_5 - 10$$

非基变量系数全部 ≥ 0 。

c. 当前的 BFS: 显然可以, 全部非负。

$$\bar{s}_B = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (4, 5, 0, 0, 0)$$

d. 算这个 BFS 的目标值

$$Z(\bar{s}_B) = 7 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 10 = -10$$

所以已经得到一个可行值 $Z = -10$ 。

e. 现在有一个定理说: 因为 $Z = 7x_3 + 1x_4 + 4x_5 - 10$, 且

$$x_3, x_4, x_5 \geq 0, \quad 7, 1, 4 \geq 0$$

所以

$$7x_3 + x_4 + 4x_5 \geq 0$$

因此 $Z \geq -10$ 。这句话对所有可行点都成立, 所以全局最小值一定满足

$$Z_{\min} \geq -10$$

但我们刚刚已经找到了一个可行点 $\bar{s}_B$ 使得 $Z(\bar{s}_B) = -10$, 因此

$$Z_{\min} = -10$$

$$Z_{\min} \geq -10$$

并且 $\bar{s}_B = (4, 5, 0, 0, 0)$ 就是最优解。

2. 形式化表述: Consider a *canonical form* linear programming problem in n variables and m constraints ($m \leq n$), presented in the form $\min Z$ subject to

$$x_j \geq 0 (1 \leq j \leq n),$$

and

$$x_i + \sum_{j=m+1}^n a_{ij}x_j = b_i (1 \leq i \leq m),$$

where the current basis is $B = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ (so the left $m \times m$ block is I_m), and $b_i \geq 0$ for all $1 \leq i \leq m$.

Assume that the current expression for the objective function is

$$Z = \sum_{j=m+1}^n c_j x_j - z_0.$$

If

$$c_j \geq 0 \text{ for all } j = m+1, \dots, n,$$

then the minimum value of the objective function is $Z_{\min} = -z_0$, and it is attained at the feasible point

$$\bar{s}_B = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, 0, \dots, 0).$$

In particular, $\bar{s}_B$ is an optimal feasible point.

3. Proof:

a. 我们要证明：在 canonical form 下，如果目标函数当前写成

$$Z = \sum_{j=m+1}^n c_j x_j - z_0.$$

且对所有非基变量 $x_{m+1}, \dots, x_n$ 都有 $c_j \geq 0$ ，那么最小值就是 $-z_0$ ，并且在当前 BFS $\bar{s}_B = (b_1, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$ 取得。

b. Step 0: 先明确 canonical form 给了我们什么

i. 我们知道约束是

$$x_i + \sum_{j=m+1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (1 \leq i \leq m)$$

ii. 变量都要求非负 $x_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq n)$ 。

iii. Canonical Form 要求 $b_i \geq 0$ for all $1 \leq i \leq m$ 。

iv. 这就意味着我们把非基变量取 0 时，得到的点 $\bar{s}_B = (b_1, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$ 是 feasible points (所有分量非负，且满足等式)。

v. 目标函数被写成“只含非基变量”的形式：

$$Z = \sum_{j=m+1}^n c_j x_j - z_0$$

c. Step 1: 用当前 BFS 给出一个“可达到的值” $\Rightarrow$ 得到上界

i. 因为 $\bar{s}_B$ 是可行点，所以它的目标值是一个合法的可行目标值。我们把 $\bar{s}_B$ 代入目标函数。此时非基变量 $x_{m+1} = \dots = x_n = 0$ ，所以

$$Z(\bar{s}_B) = \sum_{j=m+1}^n c_j \cdot 0 - z_0 = -z_0.$$

- ii. 既然我们在做 minimization, 那么“最小值”一定不可能大于任何一个可行点的目标值。因此: $Z_{min} \leq Z(\bar{s}_B) = -z_0$.

d. Step 2: 证明任何可行点都满足 $Z \geq -z_0 \Rightarrow$ 得到下界

- i. $Z = \sum_{j=m+1}^n c_j x_j - z_0$ 可以得到 $Z + z_0 = \sum_{j=m+1}^n c_j x_j$ (1)。
- ii. 对于(1)式, 约束要求 $x_j \geq 0$, 定理假设 $c_j \geq 0$, 因此 $c_j x_j \geq 0$ 。
- iii. 因此, $\sum_{j=m+1}^n c_j x_j \geq 0$ (2)。
- iv. 合并(1)式和(2)式, 我们可得

$$Z + z_0 \geq 0 \Rightarrow Z \geq -z_0$$

这句话对所有可行点都成立, 因此特别地, 对最小值也成立:

$$Z_{min} \geq -z_0$$

e. Step 3: 上下界夹逼 $\Rightarrow$ 最小值等于 $-z_0$

- i. 我们从 Step 1 可知 $Z_{min} \leq -z_0$ 。
- ii. 我们从 Step 2 可知 $Z_{min} \geq -z_0$ 。
- iii. 因此

$$Z_{min} = -z_0$$

f. Step 4: 最小值在 $\bar{s}_B$ 处取得 $\Rightarrow \bar{s}_B$ 最优

- i. 我们在 Step 1 已经算出

$$Z_{min} = -z_0$$

- ii. 而 Step 3 告诉我们最小值就是 $-z_0$ 。所以 $\bar{s}_B$ 达到了最小值, 必然是最优点。

4. 总结: 在 canonical dictionary 里, 如果你能把目标写成

$$Z = -z_0 + \sum_{j \in N} c_j x_j$$

并且所有非基变量系数 $c_j \geq 0$ (min), 那么因为 $x_j \geq 0$, 右边那坨永远 ≥ 0 , 所以

$$Z \geq -z_0$$

而当前 BFS 取到 $-z_0$, 所以最优。

5. 应用: 和之前的例子一样, 在 simplex 的 canonical form 中, 目标函数可以写成只包含 non-basic variables 的形式 (Z-row)。因此, 在进入 phase 2 后, 每一步 pivot 后, 我们只需要检查 Z-row:

- a. 如果存在某个 non-basic variable 的系数 $c_j < 0$, 说明可以继续降低目标值。
- b. 如果所有 $c_j \geq 0$, 说明当前 BFS 已经达到最优值, 算法终止。

Theorem 2: Unboundedness Criterion

6. Example: 我们给一个有 $n = 4$ 个变量、 $m = 2$ 条约束的 canonical form (basis 取 $B = \{x_3, x_4\}$, 非基是 x_1, x_2)。例子和之前的 NBB 例子一致。

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_3	1	-2	1	0	1
x_4	0	-1	0	1	2
Z	0	-1	0	0	$-Z + 5$

a. 基本信息:

- Basis: $\{x_3, x_4\}$ 。
- 非基: $\{x_1, x_2\}$ 。
- 当前 BFS: $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 1, 2)\}$ 。
- 目标函数: $Z = 5 + x_2$ 。

b. 选 entering variable: 这里就可以看出端倪, 因为 x_2 没办法最小化 Z 。

c. 假设我们选 x_2 作为了 entering variable, 当我们做 ratio test 时

$$\text{i. } x_3 + x_1 - 2x_2 = 1 \Rightarrow x_3 = 1 - x_1 + 2x_2: \text{ 令 } x_1 = 0,$$

$$x_3 = 1 + 2x_2$$

$$\text{ii. } x_4 - x_2 = 2 \Rightarrow x_4 = 2 + x_2: \text{ 令 } x_1 = 0,$$

$$x_4 = 2 + x_2$$

没有任何 basic variable 会被压到 0, 更不会变负。

d. 现在有一个定理说, 我们可以通过下面 3 步直接判断 NBB

- Step 1: 确认 non-basic variable, 这里是 $\{x_1, x_2\}$ 。
- Step 2: 如果 non-basic variable 中有一个在 z-row 里 < 0 , 满足条件 1 ($c_2 = -1 < 0$)。
- Step 3: 查看对应的那一列 (看 x_2 这一列), 如果这一列都 ≤ 0 , 则满足条件 2 (这里 $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \leq 0$)。
- 我们称这一列为 special column, 并且如果出现 special column, 可以判定 NBB。

e. 标准版定义: If there exists a non-basic variable x_j such that

$$\text{i. } c_j < 0, \text{ and}$$

$$\text{ii. } a_{ij} \leq 0 \text{ for all } i,$$

then the corresponding column is a special column, and the LP is unbounded below (NBB).

7. 形式化表述: If there exists j^* with

$$\underbrace{m+1 \leq j^* \leq n}_{\text{the non-basic range}}$$

satisfying

- $c_{j^*} < 0$ and

- b. $a_{ij^*} \leq 0$ for each i with $1 \leq i \leq m$

then the objective function is NBB. This is the analytic way of saying that if there is a “special” column then the problem is NBB.

8. Proof:

- a. 先回忆 theorem 2 的条件：我们假设存在某个 j^* 满足 $c_{j^*} < 0$ 和 $a_{ij^*} \leq 0$ for each i with $1 \leq i \leq m$ 。这里的 j^* 对应的是一个 non-basic variable 的列。
- b. 证明总策略：我们显式构造了一族点 $\bar{s}_t (t \geq 0)$ ，然后证明 2 件事情
- 对每个 $t \geq 0$ ， $\bar{s}_t$ 都是 feasible solution。
 - 当 $t \rightarrow \infty$ 时， $Z(\bar{s}_t) \rightarrow -\infty$ 。

这样我们就知道：有无穷多个 feasible points，且它们的 objective values 可以降到任意小。所以 objective function NBB。

c. Step 1: 构造 $\bar{s}_t$ 。

- Set $x_{j^*} = t \geq 0$ 。（这里的 x_{j^*} 就是我们 special column 对应的那个 variable，比如上述例子中 $x_{j^*} = x_2$ 。）
- Set $x_j = 0$ for each j with $m+1 \leq j \leq n, j \neq j^*$ 。（其他 non-basic variables 全部继续保持 0，只有 x_{j^*} 这一个 non-basic variable 被放开，设成 t 。）
- Set $x_i = b_i - a_{i,j^*}t, i = 1, \dots, m$ 。

1. 在 canonical form 里，每个 basic variable 本来都写成

$$x_i = b_i - \sum_{j=m+1}^n a_{ij}x_j.$$

2. 现在除了 x_{j^*} 之外，别的 non-basic variables 全都设成 0，所以只剩：

$$x_i = b_i - a_{i,j^*}x_{j^*} = b_i - a_{i,j^*}t.$$

d. Step 2: 证明这些点都是 nonnegative

- Since $a_{ij^*} \leq 0, -a_{ij^*} \geq 0$ 。
- We are at phase 2 and we have BFS, so $b_i \geq 0$ 。
- Therefore, $x_i = b_i - a_{i,j^*}t = b_i + (-a_{i,j^*}t) \geq 0$ 。（这说明每个 basic variable 都非负。）
- For non-basic variables, we have $x_{j^*} = t \geq 0$ and the remaining non-basic variables is 0。（这说明每个 non-basic variable 都非负。）
- 所以所有坐标都非负。

e. Step 3: 定义 $\bar{s}_t$ 的完整形式

$$\bar{s}_t = (b_1 - a_{1,j^*}t, b_2 - a_{2,j^*}t, \dots, b_m - a_{m,j^*}t, 0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0).$$

- i. 前 m 个 basic coordinates 按公式算。
 - ii. 后面的 non-basic coordinates 全是 0，只有第 j^* 个位置是 t 。
- f. Step 4: 证明 $\bar{s}_t$ 满足约束等式（这是为了证明这些点不只是非负，而且真的还在可行域里）。

- i. 已知对任意 $i = 1, \dots, m$,

$$x_i + \sum_{j=m+1}^n a_{ij}x_j$$

- ii. 代入 $\bar{s}_t$ 后变成

$$(b_i - a_{i,j^*}t) + \sum_{j=m+1}^n a_{ij}x_j.$$

- iii. 由于除了 j^* 以外，所有 non-basic $x_j = 0$ ，所以这个求和里只有一个 surviving term，也就是： $a_{i,j^*}x_{j^*}$ 。

- iv. 因此， $(b_i - a_{i,j^*}t) + a_{i,j^*}x_{j^*}$ 。并且代入 $x_{j^*} = t \geq 0$ ，我们得到

$$(b_i - a_{i,j^*}t) + a_{i,j^*}t = b_i.$$

这恰好就是第 i 条 canonical constraint 的右端。所以对每个 i ，约束等式都成立。

- v. 我们得出结论：

$\bar{s}_t$ is a feasible solution for every $t \geq 0$.

- g. Step 5: 计算目标函数 $Z(\bar{s}_t)$

- i. 在 canonical form 中，我们知道 basic columns 的 bottom-row entries 都是 0，因此

$$Z = \sum_{j=m+1}^n c_j x_j - z_0.$$

- ii. 因此我们得到

$$Z(\bar{s}_t) = c_{j^*}x_{j^*} - z_0 = c_{j^*}t - z_0.$$

- h. Step 6: 最后如何推出 $-\infty$

- i. 因为 $c_{j^*} < 0$ ，因此当 $t \rightarrow \infty$ 时，

$$c_{j^*}t - z_0 \rightarrow -\infty.$$

- ii. 这说明了

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(\bar{s}_t) = -\infty.$$

所以 objective function 没有下界，即 the problem is NBB。

Theorem 3: Quotient Competition

9. 直观版：如果当前还没最优（有负的 c_j ），但也不是 unbounded（没有 special column），那我们一定可以做一个 pivot，使得

- a. 仍然保持 feasible
- b. 并且目标函数下降

换句话说，如果

c. Theorem 1 不成立 $\rightarrow$ 存在 $c_j < 0 \rightarrow$ 虽然有 BFS（是 canonical form），但是还没做到目标函数系数都为正，也就是没有到最有

d. Theorem 2 不成立 $\rightarrow$ 没有 special column $\rightarrow$ 说明没有 NBB 情况出现

那说明，一定存在某一列

- e. $c_j < 0$ ，能下降
- f. 且该列至少有一个正数，可以做 pivot

10. 如何通过 pivoting 找到最优解（这是我们之前学习的 pivoting 的第三个用法）——得到 Basic Feasible Solution 之后，“推动”我们走向最优解

- a. Pivoting 的核心结论：pivot = 换一个 basis = 换一个顶点
- b. 还是看之前的例子

1	0	5/3	-5/3	5
0	1	1/3	8/3	1
0	0	2/3	-2/3	Z-4

1. 当前 BFS: (5,1,0,0)

2. Step 0: 先判断处在哪种情况

1. Theorem 1 不成立（还没 optimal）：因为 Z-row 存在负的 c_j

$$c_3 = \frac{2}{3} > 0, c_4 = -\frac{2}{3} < 0$$

2. Theorem 2 不成立（不是 NBB）：因为没有 special column, x_4 这一列有正数 8/3

3. 所以我们进入 Theorem 3（做 pivot）

3. Step 1: 选 pivot column（也就是之前说的 entering variable）

1. 要求: $c_j < 0$

2. 这里只有: $c_4 = -2/3 < 0$ ，因此 pivot column = x_4

4. Step 2: 选 pivot row（ratio test）

1. Step 2.1: 筛选 eligible rows。只看 column j^* 上方的 entries $a_{1j^*}, a_{2j^*}, \dots, a_{mj^*}$ ，只有满足

$$a_{ij^*} > 0$$

才有资格参加 ratio test。这里我们发现 -2/3 这一列上面只有 8/3 大于 0，因此只有 8/3 可以参加 ratio test。

2. Step 2.2: 对于每个 eligible row, 计算

$$\frac{b_i}{a_{ij^*}}$$

a. b_i 是这一行 RHS

b. a_{ij^*} 是这一行在 pivot column 里的 entry

这里的候选人只有一个, 因此

$$\frac{b_i}{a_{ij^*}} = \frac{1}{8/3} = \frac{3}{8}$$

5. Step 3: 选最小 ratio

$$\min \left\{ \frac{b_i}{a_{ij^*}} : a_{ij^*} > 0 \right\}$$

取得最小值的那一行, 就是 pivot row。对应的 basic variable 就是 leaving variable。

6. Step 4: 确定 pivot position (pivot row 和 pivot column 的交点)

7. 特殊情况: 如果我们出现了多个 $c_j < 0$ 的 column, 理论上选任意一个都可以, 但是为了最快的降低目标函数, 我们可以使用

$$-z'_0 = -z_0 + \frac{c_{j^*} b_{i^*}}{a_{i^*, j^*}}$$

计算。具体来说

1. 针对每个候选 column, 使用 ratio test 找出该 column 的 pivoting position, 这是我们的 a_{i^*, j^*} 。

2. 使用公式

$$-z'_0 = -z_0 + \frac{c_{j^*} b_{i^*}}{a_{i^*, j^*}}$$

也就是对于每一个候选 column, 算出新最小值:

新目标函数值 = 原目标函数值

$$+ \frac{\text{z row 的系数} \times \text{pivot position 的 RHS}}{\text{pivoting position 的 entry}}$$

3. 对比所有候选 column 的新目标函数值, 选出下降最快的候选 column 作为我们的 pivot column, 并选择对应的 pivot row。

c. 几个需要注意的情况 (对于每个候选 column, 若有多个)

i. 正常情况 — 有多个 eligible rows: 计算每一个的 ratio, 谁最小谁赢。

ii. 正常情况 — 只有 1 个 eligible row: 直接作为 pivot row。

- iii. 特殊情况 — ratio test 的两个 ratios 算出来一样：那么两行都可以作为 pivot row。
- iv. 特殊情况 — 1 个 eligible row 的 ratio 是 0：这等价于 $b_i = 0$ ，因为 $a_{ij^*} > 0$ 。这说明 pivot 后目标值不严格下降，这是 degeneracy 的来源之一。
- v. 特殊情况 — 根本没有 eligible row：属于 NBB，Theorem 2 判断。

11. 形式化表述：Assume the current tableau is in canonical form and corresponds to a feasible basic solution, and that neither Theorem 1 nor Theorem 2 applies. Then there exists a non-basic variable x_{j^*} such that:

$$c_{j^*} < 0 \text{ and } a_{i,j^*} > 0 \text{ for at least one } i.$$

Let i^* be a row that:

- a. is eligible ($a_{i^*,j^*} > 0$)
- b. and satisfies:

$$\frac{b_{i^*}}{a_{i^*,j^*}} = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{i,j^*}} : a_{i,j^*} > 0 \right\}$$

Then, pivoting at (i^*, j^*) produces:

- c. New basis: old basis $\cup \{x_{j^*}\} - \{x_{i^*}\}$
- d. The new solution is still feasible.
- e. The objective function does not increase.

$$Z_{\text{new}} = -z_0 + c_{j^*} \cdot \frac{b_{i^*}}{a_{i^*,j^*}} \leq -z_0$$

If $b_{i^*} > 0$, the objective function decreases strictly.

12. Proof:

- a. 到底要证什么
 - i. 新的 basic solution 仍然 feasible：我们会做 pivoting，pivoting 后会有新的 basic solution，证明其依旧大于等于 0。
 - ii. 目标函数值下降：要证明 pivoting 后的新常数项满足

$$-z'_0 = -z_0 + \frac{c_{j^*} b_{i^*}}{a_{i^*,j^*}}$$

b. 重要的 notation

- i. 行 index: $i = 1, \dots, m$
 - 1. 表示第 i 个 constraint / row
 - 2. 对应一个 basic variable
- ii. 列 index: $j = m + 1, \dots, n$
 - 1. 表示第 j 个 non-basic variable
- iii. 特殊 index

- $$\frac{b_{i^*}}{a_{i^*,j^*}} = \min \frac{b_i}{a_{i,j^*}}$$

- $$c_j^* < 0$$

1. $x_1, \dots, x_m$: basic variables

3. Pivoting 发生时: x_{j^*} 进入 basis; x_{i^*} 离开 basis

1. a_{ij} : 第 i 行、第 j 列的 coefficient

1. b_i : pivot 前, 第 i 个 basic variable 的值

- $$b'_{j^*} = \frac{b_{i^*}}{a_{i^*,j^*}}$$

- | | x_1 | x_{i^*} | x_m | x_{m+1} | x_{j^*} | x_n |
|-----------|-------|-----------|-------|----------------|----------------|--------------|
| x_1 | 1 | 0 | 0 | | | |
| x_{i^*} | 0 | 1 | 0 | $a_{i^*, m+1}$ | a_{i^*, j^*} | $a_{i^*, n}$ |
| x_m | 0 | 0 | 1 | | | |
| | 0 | 0 | 0 | c_{m+1} | c_{j^*} | c_n |
- $a_{i^*, j^*} < 0$
 $a_{i^*, j^*} > 0$

在目前的 setting 中，当前 basis 是 $\{x_1, \dots, x_m\}$ ，所以左半部分是单位矩阵 I_m ，右半部分是 non-basic columns。我们选中了 pivot column j^* ，也选中了 pivot row i^* 。此时已知：

$$c_{j^*} < 0, \quad a_{i^*, j^*} > 0.$$

并且 i^* 是 quotient competition 的 winner。

我们需要重点关注 3 个位置

- i. Pivot entry: $a_{i^*, j^*} > 0$
 - ii. Pivot row 的 RHS: b_{i^*}
 - iii. Z-row 在 pivot column 的绿色 entry: $c_{j^*} < 0$
- d. Step 1: Pivot 的第一部分 —— 先把 pivot entry 变成 1
- i. 目前的 pivot entry 是 a_{i^*, j^*} ，因此如果记原来的 pivot row 是 $R_{x_{i^*}}$ ，那么变成

$$R_{x_{i^*}} \leftarrow \frac{1}{a_{i^*, j^*}} R_{x_{i^*}}$$

ii. 操作后：

- 1. 原来 pivot position 是 a_{i^*, j^*} ，除掉以后，这里变成 1。
- 2. pivot row 现在变成了“以 x_{j^*} 为主元”的那一行，也就是说它以后要对应新的 basic variable x_{j^*} 。

iii. 因此：这一行的 RHS 变成

$$b'_{j^*} = \frac{b_{i^*}}{a_{i^*, j^*}}$$

对于任何非 pivot 的 non-basic 列 $j \neq j^*$ ，这行的系数变成

$$\frac{a_{i^*, j}}{a_{i^*, j^*}}$$

	x_1	x_i	x_{i^*}	x_{m+1}	x_{j^*}	x_n	
x_1	1	0	0	0			
x_i	0	1	0	0	$a_{i, m+1}$	a_{i, j^*}	$a_{i, n}$
$(was\ x_{i^*})\ x_{j^*}$	0	0	$\frac{1}{a_{i^*, j^*}}$	$\frac{a_{i^*, m+1}}{a_{i^*, j^*}}$	1	$\frac{a_{i^*, n}}{a_{i^*, j^*}}$	$\frac{b_{i^*}}{a_{i^*, j^*}}$
x_{m+1}	0	0	0	1			
	0	...	0	...	0	...	0
					c_{m+1}	c_{j^*}	c_n
							$z_0 + \bar{z}$

重要结论： b'_{j^*} 已经自动非负，因为

- iv. 原来当前 BFS feasible，所以 $b_{i^*} \geq 0$
- v. pivot row 必须 eligible，所以 $a_{i^*, j^*} > 0$

因此，

$$b'_{j^*} = \frac{b_{i^*}}{a_{i^*,j^*}} \geq 0.$$

e. Step 2: Pivot 的第二部分 —— 把 pivot column 其他位置全消成 0

	x_1	x_i	x_{i^*}	x_m	x_{m+1}	x_{j^*}	x_n
x_1	1	0		0		0	
x_i	0	1		0	$a'_{i,m+1}$	0	b'_i
x_{j^*} (was x_{i^*})	0	0	$\frac{1}{a_{i^*,j^*}}$	0	$\frac{a'_{i^*,m+1}}{a_{i^*,j^*}}$	1	$\frac{a'_{i^*,n}}{a_{i^*,j^*}}$
x_m	0	0		1		0	
Objective	$0 \dots 0$	$0 \dots 0$	c'_{j^*}	$0 \dots 0$	c'_{m+1}	0	c'_n

- i. 对非 pivot row $i \neq i^*$: 如果第 i 行在 pivot column 上的 entry 是 a_{i,j^*} , 那就做

$$R_{x_i} \leftarrow R_{x_i} - a_{i,j^*} R_{x_{j^*}}.$$

- ii. 对 objective row: objective row 在 pivot column 上的绿色 entry 是 c_{j^*} 。为了把它也消成 0, 要做:

$$R \leftarrow R - c_{j^*} R_{x_{j^*}}.$$

f. 总结一下 row operations 之后, 能读出哪些公式

- i. 非 pivot row、非 pivot column 的新系数: 对任意 $i \neq i^*$, 以及任意 non-basic 列 $j \neq j^*$, 新系数是

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{i,j^*} \cdot \frac{a_{i^*,j}}{a_{i^*,j^*}}.$$

本质上就是原系数减去“本行 pivot-column entry $\times$ pivot-row 该列系数”。

- ii. 非 pivot row 的新 RHS:

$$b'_i = b_i - a_{i,j^*} \cdot \frac{b_{i^*}}{a_{i^*,j^*}} \quad (i \neq i^*)$$

- iii. 新的 objective coefficients: 对于任意 $j \neq j^*$ 的 non-basic column,

$$c'_j = c_j - c_{j^*} \cdot \frac{a_{i^*,j}}{a_{i^*,j^*}}.$$

- iv. 新的目标函数常数项:

$$z'_0 = z_0 - c_{j^*} \cdot \frac{b_{i^*}}{a_{i^*,j^*}}.$$

等价于:

$$-z'_0 = -z_0 + \frac{c_{j^*} b_{i^*}}{a_{i^*,j^*}}.$$

g. Step 3: 证明目标函数值下降

$$-z'_0 = -z_0 + \frac{c_{j^*} b_{i^*}}{a_{i^*, j^*}}$$

i. 由于 $c_{j^*} < 0, b_{i^*} \geq 0, a_{i^*, j^*} > 0$, 因此

$$\frac{c_{j^*} b_{i^*}}{a_{i^*, j^*}} \leq 0.$$

ii. 于是: $-z'_0 \leq -z_0$, 这说明 pivot 后的新 objective value 不会比旧的更大; 在 minimization 里, 这意味着值变小了或者不变。

iii. 什么时候严格下降: 如果 $b_{i^*} > 0$, 那上面的修正项就是严格负数

$$\frac{c_{j^*} b_{i^*}}{a_{i^*, j^*}} < 0$$

因此 $-z'_0 < -z_0$, 这就是严格下降。

iv. 什么时候可能不下降: 如果 $b_{i^*} = 0$, 那修正项等于 0, 所以 $-z'_0 = -z_0$ 。

h. Step 4: 证明 feasibility

i. 已知 $b'_{j^*} = \frac{b_{i^*}}{a_{i^*, j^*}} \geq 0$, 需要证明对每个 $i \neq i^*$,

$$b'_i = b_i - a_{i, j^*} \cdot \frac{b_{i^*}}{a_{i^*, j^*}} \geq 0$$

ii. Case 1: 如果 $a_{i, j^*} \leq 0$

1. 由于 $a_{i, j^*} \leq 0, b_{i^*} \geq 0, a_{i^*, j^*} > 0$, 因此

$$-a_{i, j^*} \cdot \frac{b_{i^*}}{a_{i^*, j^*}} \geq 0.$$

2. 于是

$$b'_i = b_i - a_{i, j^*} \cdot \frac{b_{i^*}}{a_{i^*, j^*}} = b_i + \left(-a_{i, j^*} \cdot \frac{b_{i^*}}{a_{i^*, j^*}} \right) \geq b_i.$$

而原来当前 BFS feasible, 所以 $b_i \geq 0$ 。

3. 因此, $b'_i \geq 0$ 。

iii. Case 2: 如果 $a_{i, j^*} > 0$

1. 由于 $a_{i, j^*} > 0$, 第 i 行是 eligible row, 而我们知道 pivot row i^* 是 quotient competition 的 winner, 所以:

$$\frac{b_{i^*}}{a_{i^*, j^*}} \leq \frac{b_i}{a_{i, j^*}} \Leftrightarrow \frac{b_i}{a_{i, j^*}} \geq \frac{b_{i^*}}{a_{i^*, j^*}}.$$

2. 现在因为 $a_{i, j^*} > 0$, 我们可以两边同乘 a_{i, j^*} , 不改变不等号方向, 得到

$$b_i \geq a_{i,j^*} \cdot \frac{b_{i^*}}{a_{i^*,j^*}}.$$

把右边移到左边：

$$b_i - a_{i,j^*} \cdot \frac{b_{i^*}}{a_{i^*,j^*}} \geq 0.$$

因为 $b'_i = b_i - a_{i,j^*} \cdot \frac{b_{i^*}}{a_{i^*,j^*}}$, 所以

$$b'_i \geq 0.$$

- i. 证明结束：我们发现 ratio test 不是拍脑袋的规则，它正是保证新解仍 feasible 的精确条件。

13. Degeneracy

a. Example: 比如下面这个 tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_1	1	0	1	0	0
x_2	0	1	1	0	2
Z	0	0	-1	0	Z

i. 已知条件

1. 当前 basis: $\{x_1, x_2\}$

2. 当前 basic solution: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 0$

3. 当前目标函数: $Z = -x_3$

ii. Step 1: 选 entering variable, 看 z-row

$$c_3 = -1 < 0$$

entering variable = x_3

iii. Step 2: 做 ratio test, 看 x_3 列

row	a_{i3}	RHS	ratio
x_1	1	0	$0/1 = 0$
x_2	1	2	$2/1 = 2$

很明显最小 ratio 是 0, 因此 pivot row = 第一行 (x_1)

iv. Step 3: 做 pivot, pivoting position 是 ($row x_1, col x_3$)

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_3	1	0	1	0	0
x_2	-1	1	0	0	2
Z	-1	0	0	0	Z

我们发现 basis 变了 $\{x_1, x_2\} \rightarrow \{x_3, x_2\}$, 但是 solution 没变, Z 没变。

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 0$$

- v. 原因解析：这是因为我们选了一个 $b_{i^*} = 0$ 的 element 作为 pivoting position。

- b. Theorem 3 的 corollary: 如果 pivot row 满足 $b_{i^*} > 0$, 那么 Z 会下降。但是如果 $b_{i^*} = 0$, 此时 Z 不变, 这叫做 degenerate pivot。虽然 associated basic solution 不变, 但 basis 变了。
- c. 原因: 关键在于 $b_{i^*} = 0$ 。
- i. pivot 后 entering variable 的值是: $x_{j^*} = \frac{b_{i^*}}{a_{i^*,j^*}} = 0$, entering variable = 0。
 - ii. leaving variable 原本就是: $x_{i^*} = 0$
 - iii. 所以你做了一个 0 和 0 的交换。
- d. Ratio Test 的 3 种情况
- i. 正常情况 — 有多个 eligible rows: 计算每一个的 ratio, 谁最小谁赢。
 - ii. 正常情况 — 只有 1 个 eligible row: 直接作为 pivot row。
 - iii. 特殊情况 — ratio test 的两个 ratios 算出来一样: 那么两行都可以作为 pivot row。
 - iv. 特殊情况 — 1 个 eligible row 的 ratio 是 0: 这等价于 $b_i = 0$, 因为 $a_{ij^*} > 0$ 。这说明 pivot 后目标值不严格下降, 这是 degeneracy。
 - v. 特殊情况 — 根本没有 eligible row: 属于 NBB, Theorem 2 判断。

Lecture 5: Simplex Algorithm Phase 1 的理论部分与标准方法

回顾我们之前学习的 Phase 1

1. Phase 1 的目的：找到确定 Canonical Form，选择起点 basis，开始 pivoting 得到 basic feasible solution。
 - a. 停止条件：得到 basic feasible solution
 - b. 确定 pivot position：就是找“负+负”。这里我们选择最负的一个 B，在这一行随机选一个负数。
2. 但是这个方法不够标准化，这套方法本质上是在“手动试图构造一个好 basis”。而现在本节介绍标准 Simplex 方法，通过引入 Artificial Variables，来达到 Phase 1 的目的——和之前一样，找到一个 good basis，也就是找到一个 associated basic solution feasible 的 basis。

Simplex 方法 Phase 1

3. Phase 1 目标：找到一个 good basis，也就是找到一个 associated basic solution feasible 的 basis。
 - a. 换句话说：我们要为原问题找到一个 BFS，然后才能启动 Phase 2。
 - b. 现在方法的逻辑：构造一个 auxiliary lpp，让 simplex algorithm 自己帮我们找 good basis。
4. Example：我们用下面这个例子贯穿整个流程

$$\min Z = 10x_1 + 4x_2$$

subject to

$$x_1, x_2 \geq 0, \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 60 \\ 7x_1 + 2x_2 \geq 84 \\ 3x_1 + 6x_2 \geq 72 \end{cases}$$

5. 准备工作：先把原问题变成 Standard Form 并检查 Canonical Form。
 - a. 和之前的方法一样，因为原约束是“ $\geq$ ”，所以要引入 surplus variables。我们设 $x_3, x_4, x_5 \geq 0$ 。

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 60 \\ 7x_1 + 2x_2 - x_4 = 84 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_5 = 72 \end{cases}$$

- b. 仔细查看这里的情况，写成 hyper augmented matrix。

3	2	-1	0	0	60
7	2	0	-1	0	84
3	6	0	0	-1	72
10	4	0	0	0	Z

我们发现这没有在 Canonical Form 里，因为不存在单位列，这个系统没有直接 reveal 一个 good basis。

6. Step 0: Preprocessing。我们需要 multiply by -1 any constraint equality whose right hand number is negative.

- a. 解读：如果某个等式 RHS 是负数，把整条约束乘以 -1 。
- b. 对于本例，我们不需要 preprocess。

7. Step 1: 引入 Artificial Variables。

- a. 设 $x_6, x_7, x_8 \geq 0$ ，把系统改成

$$(*) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 60 \\ 7x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 84 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_5 + x_8 = 72 \end{cases}$$

- b. 写出 hyper augmented matrix。

3	2	-1	0	0	1	0	0	60
7	2	0	-1	0	0	1	0	84
3	6	0	0	-1	0	0	1	72
10	4	0	0	0	0	0	0	Z

- c. 我们发现 x_6, x_7, x_8 的列组成了一个单位矩阵，因此 The Artificial Variables form a good basis for $(*)$.

1. 初始 Basis: $B = \{x_6, x_7, x_8\}$ 。

2. 对应的 associated basic solution 是：

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0, x_6 = 60, x_7 = 84, x_8 = 72$$

这是一个 feasible basic solution。

8. Step 2: 构造 auxiliary LPP。

- a. Step 2.1: 定义 $w = x_6 + x_7 + x_8$ 。于是我们可以写出一个 auxiliary LPP

$$(l_{aux}) \min w = x_6 + x_7 + x_8$$

subject to

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$$

and

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 60 \\ 7x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 84 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_5 + x_8 = 72 \end{cases}$$

- b. Step 2.2: 把 auxiliary LPP 写成 Canonical Form。目前 objective function 还写在 basic variables 里，所以

$$x_6 = 60 - 3x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_7 = 84 - 7x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$x_8 = 72 - 3x_1 - 6x_2 + x_5$$

相加得到 $w = 216 - 13x_1 - 10x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ ，这就是 w 的 canonical expression。

c. 解读：为什么最小化 w 有用

1. Crucial Fact: 原系统(l)有解, if and only if 新系统(*)有一个解满足

$$x_6 = x_7 = x_8 = 0$$

2. 为什么

1. 因为如果原问题有解 $(x_1, \dots, x_5)$ ，那么把 $x_6 = x_7 = x_8 = 0$ 加进去，就得到 (*) 的一个解。

2. 反过来，如果 (*) 有一个解使 $x_6 = x_7 = x_8 = 0$ ，那么去掉这三个 artificial variables，剩下的 $(x_1, \dots, x_5)$ 就是原问题 (l) 的解。

3. 结论: (l) feasible $\Leftrightarrow$ (*) has a solution with $x_6 = x_7 = x_8 = 0$

4. 这和 w 的关系是什么: 因为 $x_6, x_7, x_8 \geq 0$ ，所以

$$w = x_6 + x_7 + x_8 \geq 0$$

并且:

$$w = 0 \Leftrightarrow x_6 = x_7 = x_8 = 0$$

5. Great Conclusions

1. First Great Conclusion: If $w_{min} = 0$ then (l) has a good basis and Phase 2 can be initiated on its Canonical form.

2. Second Great Conclusion: If $w_{min} > 0$ (since artificial variables cannot both be 0), (l) is infeasible.

9. Step 3: 在 (l_{aux}) 上应用你已经会的 Phase 2

a. 书写 auxiliary LPP 的 hyper augmented matrix

3	2	-1	0	0	1	0	0	60
7	2	0	-1	0	0	1	0	84
3	6	0	0	-1	0	0	1	72
-13	-10	1	1	1	0	0	0	w-216

b. 检测 Theorem 1 是否实用: $c_1 = -13 < 0, c_2 = -10 < 0$ ，因此所以 Theorem 1 不适用。

c. Quotient Competition 1: 这里 x_1 和 x_2 都可以作为 pivoting column，因此我们可以借助 Theorem 3 的推论判断哪个会让目标函数降低的更快。

$$Z_{new} = -z_0 + c_{j^*} \cdot \frac{b_{i^*}}{a_{i^*,j^*}}$$

根据该公式，我们分别进行 ratio test

1. 如果使用 x_1 ,

$$\frac{60}{3} = 20, \frac{84}{7} = 12, \frac{72}{3} = 24$$

最小的是 12, 因此 winning row 是第二行, 也就是 x_7 -row。因此

$$Z_{\text{new}} = -216 + (-13) * \frac{84}{7} = -372$$

2. 如果使用 x_2 ,

$$\frac{60}{2} = 30, \frac{84}{2} = 42, \frac{72}{6} = 12$$

最小的是 12, 因此 winning row 是第三行, 也就是 x_8 -row。因此

$$Z_{\text{new}} = -216 + (-10) * \frac{72}{6} = -336$$

3. Pivoting 结果: 最终因为使用 x_1 可以让目标函数下降的更快, 因此使用 x_1 作为 entering variable; x_7 是 leaving variable。新 basis 是 $B = \{x_6, x_1, x_8\}$ 。

0	8/7	-1	3/7	0	1	-3/7	0	24
1	2/7	0	-1/7	0	0	1/7	0	12
0	36/7	0	3/7	-1	0	-3/7	1	36
0	-44/7	1	-6/7	1	0	13/7	0	w-60

$$w - 60 = -\frac{44}{7}x_2 + x_3 - \frac{6}{7}x_4 + x_5 + \frac{13}{7}x_7$$

$$w = -\frac{44}{7}x_2 + x_3 - \frac{6}{7}x_4 + x_5 + \frac{13}{7}x_7 + 60$$

d. Quotient Competition 2: 同之前方法, 此处不在论述, 我们这里选 x_2 列

1. 进行 ratio test

$$\frac{24}{8/7} = 21, \frac{12}{2/7} = 42, \frac{36}{36/7} = 7$$

最小的是 7, 因此 winning row 是第三行, 也就是 x_8 -row。

2. Pivoting 结果: x_2 是 entering variable; x_8 是 leaving variable。新 basis 是 $B = \{x_6, x_1, x_2\}$ 。

0	0	-1	1/3	2/9	1	-1/3	-2/9	16
1	0	0	-1/6	1/18	0	1/6	-1/18	10
0	1	0	1/12	-7/36	0	-1/12	7/36	7
0	0	1	-1/3	-2/9	0	4/3	11/9	w-16

$$w - 16 = x_3 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{9}x_5 + \frac{4}{3}x_7 + \frac{11}{9}x_8$$

$$w = x_3 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{9}x_5 + \frac{4}{3}x_7 + \frac{11}{9}x_8 + 16$$

e. Quotient Competition 3: 同之前方法, 此处不在论述, 我们这里选 x_4 列

1. 进行 ratio test, 这里只有 2 个 eligible rows

$$\frac{16}{1/3} = 48, \frac{7}{1/12} = 84$$

最小的是 48, 因此 winning row 是第一行, 也就是 x_6 -row。

2. Pivoting 结果: x_4 是 entering variable; x_6 是 leaving variable。新 basis 是 $B = \{x_4, x_1, x_2\}$ 。

0	0	-3	1	2/3	3	-1	-2/3	48
1	0	-1/2	0	1/6	1/2	0	-1/6	18
0	1	1/4	0	-1/4	-1/4	0	1/4	3
0	0	0	0	0	1	1	1	w

$$w = x_6 + x_7 + x_8$$

- f. 求解: 根据 Theorem 1, $w_{\min} = 0$ 。并且根据 First Great Conclusion, 如果 $w_{\min} = 0$, 那么原问题 (I) 有一个 good basis。

1. 对应的 BFS: $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\} = \{18, 3, 0, 48, 0, 0, 0, 0\}$

2. 原问题的一个 BFS 是: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (18, 3, 0, 48, 0)$

10. Step 4: Phase 1 结束后, 如何切回原问题

- a. 4.1: 读 tableau, 写出目前的基本方程和目标函数

0	0	-3	1	2/3	3	-1	-2/3	48
1	0	-1/2	0	1/6	1/2	0	-1/6	18
0	1	1/4	0	-1/4	-1/4	0	1/4	3
0	0	0	0	0	1	1	1	w

$$\begin{cases} -3x_3 + x_4 + \frac{2}{3}x_5 + 3x_6 - x_7 - \frac{2}{3}x_8 = 48 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{6}x_5 + \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{6}x_8 = 18 \\ x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_5 - \frac{1}{4}x_6 + \frac{1}{4}x_8 = 3 \end{cases}$$

subject to

$$w = x_6 + x_7 + x_8$$

- b. 4.2: 把 the original objective function Z 写出由 the current non-basic variables only 的形式。

1. 之前: $Z = 10x_1 + 4x_2$

2. 把之前写出的基本方程里的 artificial variables 删除

$$\begin{cases} -3x_3 + x_4 + \frac{2}{3}x_5 = 48 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{6}x_5 = 18 \\ x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_5 = 3 \end{cases}$$

我们可以得到

$$\begin{cases} x_4 = 48 + 3x_3 - \frac{2}{3}x_5 \\ x_1 = 18 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{6}x_5 \\ x_2 = 3 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_5 \end{cases}$$

3. 代回原目标函数得到

$$Z = 10 \left(18 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{6}x_5 \right) + 4 \left(3 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_5 \right)$$

化简

$$Z = 192 + 4x_3 - \frac{2}{3}x_5$$

c. 原问题就是: $\min Z = 192 + 4x_3 - \frac{2}{3}x_5$

subject to

$$\begin{cases} x_4 = 48 + 3x_3 - \frac{2}{3}x_5 \\ x_1 = 18 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{6}x_5 \\ x_2 = 3 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_5 \end{cases}$$

and

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

11. 过程中的重要细节:

a. Phase 1 里会不会像 Theorem 2 那样出现无下界? 不会, 这是因为 w 有一个非常重要的性质

$$w \geq 0$$

因此 auxiliary lpp 不可能 NBB, w 被 0 下界住了。

b. Simplex path is path-dependent: 有时候你可能可以选择两个 entering variable, 你选择哪个都可以。pivot 规则可能影响中间路径, 虽然最终正确性不变。但是, 我们可以通过 Theorem 3 的推论

$$Z_{\text{new}} = -z_0 + c_{j^*} \cdot \frac{b_{i^*}}{a_{i^*,j^*}}$$

寻找更快的 pivoting position 以提高速度。

Degeneracy/Tie

12. 考虑下面这个问题:

$$\min z = x_1 + 2x_2 - x_4$$

subject to

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

13. 准备工作：先把原问题变成 Standard Form 并检查 Canonical Form。

1	-1	3	0	1
0	1	-2	1	1
3	1	1	1	7
0	2	0	-1	Z

不是 Canonical Form。进入 Phase 1。

14. Phase 1.0: Preprocessing。这里无需 preprocessing，因为 RHS 大于等于 0。

15. Phase 1.1: 引入 Artificial Variables。

$$\min w = x_5 + x_6 + x_7$$

1	-1	3	0	1	0	0	1
0	1	-2	1	0	1	0	1
3	1	1	1	0	0	1	7
0	0	0	0	1	1	1	W

16. Phase 1.2: 构造 auxiliary LPP。

1	-1	3	0	1	0	0	1
0	1	-2	1	0	1	0	1
3	1	1	1	0	0	1	7
-4	-1	-2	-2	0	0	0	-9+W

17. Phase 1.3: 在 (l_{aux}) 上应用 Phase 2

第一次 pivoting

a. 选择 pivoting position: 我们选择 x_1 作为 entering variable。

1. 如果选择 x_1 column:

$$(x_5, x_1): \frac{1}{1} = 1; (x_7, x_1) = \frac{7}{3}$$

最小 ratio 是 1，因此 x_5 离开。通过 Theorem 3,

$$b'_i = (-4) - (1) \cdot \frac{1}{1} = -5$$

2. 如果选择 x_2 column:

$$(x_6, x_2): \frac{1}{1} = 1; (x_7, x_2) = \frac{7}{1} = 7$$

最小 ratio 是 1，因此 x_6 离开。通过 Theorem 3,

$$b'_i = (-1) - (1) \cdot \frac{1}{1} = -2$$

3. 如果选择 x_3 column:

$$(x_5, x_3): \frac{1}{3}; (x_7, x_3) = \frac{7}{1} = 7$$

最小 ratio 是 1/3，因此 x_5 离开。通过 Theorem 3,

$$b'_i = (-2) - (3) \cdot \frac{1}{3} = -3$$

4. 如果选择 x_4 column:

$$(x_6, x_4): \frac{1}{1} = 1; (x_7, x_4) = \frac{7}{1} = 7$$

最小 ratio 是 1, 因此 x_6 离开。通过 Theorem 3,

$$b'_i = (-2) - (1) \cdot 1 = -3$$

b. 因此 pivoting position 是

(row x_5 , column x_1)

c. 做 pivoting

1	-1	3	0	1	0	0	1
0	1	-2	1	0	1	0	1
0	4	-8	1	-3	0	1	4
0	-5	10	-2	4	0	0	W-5

第二次 pivoting

d. 选择 pivoting position: 我们选择 x_4 作为 entering variable, 因为如果选 x_2 会在 quotient competition 中出现 tie, 可能导致 degeneracy。

$$(x_6, x_4): \frac{1}{1} = 1; (x_7, x_4) = \frac{4}{1} = 4$$

e. 因此 pivoting position 是

(row x_6 , column x_4)

f. 做 pivoting

1	-1	3	0	1	0	0	1
0	1	-2	1	0	1	0	1
0	3	-6	0	-3	-1	1	3
0	-3	6	0	4	2	0	W-3

第三次 pivoting

g. 选择 pivoting position: 我们选择 x_2 作为 entering variable。

$$(x_4, x_2): \frac{1}{1} = 1; (x_7, x_2) = \frac{3}{3} = 1$$

也就是说, x_4 -row 和 x_7 -row 都可以作为 pivot row。因为我们的 Phase 1 目标是把 artificial variables 从 basis 中全部赶出去, 因此我们选 x_7 -row 做 pivot。

h. 因此 pivoting position 是

(row x_7 , column x_2)

i. 做 pivoting

1	0	1	0	0	-1/3	1/3	2
0	0	0	1	1	4/3	-1/3	0
0	1	-2	0	-1	-1/3	1/3	1

0	0	0	0	1	1	1	W
---	---	---	---	---	---	---	---

18. Phase 1.4: Phase 1 结束, 切回原问题

a. 写出目前的约束

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - \frac{1}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_7 = 2 \\ x_4 + x_5 + \frac{4}{3}x_6 - \frac{1}{3}x_7 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - x_5 - \frac{1}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_7 = 1 \end{cases}$$

移除 Artificial Variables,

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2 - x_3 \\ x_4 = 0 \\ x_2 = 1 + 2x_3 \end{cases}$$

b. 写出最初的目标函数

$$Z = x_1 + 2x_2 - x_4$$

代入约束

$$Z = (2 - x_3) + 2(1 + 2x_3) = 4 + 3x_3$$

c. 写出新的 table

1	0	1	0	2
0	0	0	1	0
0	1	-2	0	1
0	0	3	0	Z-4

d. 根据 Theorem 1 可知,

$$z_{min} = 4$$

Phase 1 的两条重要定理

19. Theorem 1: Phase 1 的 w-row 检查定理

a. 内容: 在 Phase 1 的每一步中, w-row 在 original variables 的 columns 和 RHS column 上, 等于当前仍留在 basis 里的 artificial-variable rows 的负和。

b. Example:

1	-1	3	0	1	0	0	1
0	1	-2	1	0	1	0	1
0	3	-6	0	-3	-1	1	3
0	-3	6	0	4	2	0	W-3

这里我们可以看到 artificial-variable row (只有 x_7) 对应的 RHS 是 3, 因此 w -row 就是-3。

20. Theorem 2: Artificial variable 离开 basis 后, 不需要再回来

- a. 内容: An artificial variable that is removed from the basis in Phase 1 need never be returned to the basis.
- b. 用法: 一旦 artificial variable 离开 basis, 就不要再选它的 column 当 pivot column。

Lecture 6: Redundancy

回顾 Simplex 的两个 Phases 与 Redundancy

1. Recall Phase 1 / Phase 2

- a. Phase 1 的目标是找到 BFS，我们引入 artificial variables，然后最小化

$$w = \text{sum of artificial variables}$$

我们的核心结论是，如果 $w_{min} > 0$ ，则原问题 infeasible；如果 $w_{min} = 0$ ，则原问题 feasible。

- b. Phase 2 的目标是继续优化寻找最小值。

- c. 但是有一个问题：在 Phase 1 中，即使 $w_{min} = 0$ ，Phase 1 结束时也可能还有 artificial variables 留在 basis 里面，这叫 redundancy。

2. Redundancy 的标准定义：An equation or some equations in the original system of constraints are linear combinations of the remaining equations in the system.

Example of Redundancy in Simplex

3. Example：我们考虑如下的线性规划问题

$$\min z = x_1$$

subject to

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

注意第二条约束其实就是第一条约束的两倍，所以它是 redundant constraint。但是在 simplex 过程中，我们假装不知道这一点，让 Phase 1 自己把它发现出来。

4. Step 1：加入 artificial variables。原系统没有 obvious good basis，所以我们给两条等式分别加入 artificial variables x_3, x_4 ：

1	1	1	0	2
2	2	0	1	4
-3	-3	0	0	w-6

这是一个 minimization problem。底行有负数，所以还没有达到 Phase 1 的 minimum。我们选择 x_1 进入 basis。

5. Step 2：Quotient competition。我们看 x_1 -column：

$$\frac{2}{1} = 2, \frac{4}{2} = 2$$

这里出现 tie。我们随便选一个 winning row。为了方便，选第一行，也就是 x_3 -row。所以 pivoting position 是 (x_1 enter, x_3 leaves)。

6. Step 3：做 pivot。

1	1	1	0	2
---	---	---	---	---

0	0	-2	1	0
0	0	3	0	w

现在 Basis 是 $\{x_1, x_4\}$, BFS 是 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{2, 0, 0, 0\}$ 。我们发现这个时候

- Z-row 的系数没有负数;
- $w_{min} = 0$;
- artificial variable (x_4) 还在 basis;
- 查看 Z-row, 没有任何 original variable 可以用来 pivot。

这正是 redundancy section 要处理的情况。

- Step 4: 删除 redundant row 和 artificial columns。我们这里删除第二行 (x_4 row), 同时删除 artificial columns x_3, x_4 。我们得到

	x_1	x_2	RHS
x_1	1	1	2

现在我们可以进入 Phase 2。

- Step 5: 进入 Phase 2, 放回原 objective function。

- 原来目标函数是 $\min z = x_1$ 。
- 写出约束

$$x_1 + x_2 = 2 \rightarrow x_1 = 2 - x_2$$

- 改写目标函数为 $\min z = 2 - x_2$ 。

	x_1	x_2	RHS
x_1	1	1	2
z	0	-1	$z-2$

- Step 6: 继续完成 Phase 2。

Example 2 of Redundancy in Simplex (New Technique)

- 新方法的目标: Phase 1 已经得到 $w_{min} = 0$, 说明原问题 feasible; 但是 basis 里还残留 artificial variable。这个时候不能直接进入 Phase 2, 而要先用一个新 technique 把 artificial variable 从 basis 里换出去。

- Example: 我们考虑如下的线性规划问题

$$\min z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4$$

subject to

$$\begin{cases} -10x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 = 30, \\ x_1 + x_3 = 1, \\ 2x_2 + x_4 = 16, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

- Step 1: 加入 artificial variables。原系统没有 obvious good basis, 所以我们给两条等式分别加入 artificial variables x_5, x_6, x_7 :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-----

x_5	-10	5	5	1	1	0	0	30
x_6	1	0	1	0	0	1	0	1
x_7	0	2	0	1	0	0	1	16
w	9	-7	-6	-2	0	0	0	w-47

Phase 1 是 minimization problem。对于 w -row, 负 coefficient 表示如果让对应变量进入 basis, 可以降低 w 。

13. Step 2: 在 (l_{aux}) 上应用 Phase 2

a. Pivoting 1

i. 对比哪个 pivoting column 最好:

$$x_2 \text{ enter: } \frac{30}{5} = 6; \frac{16}{2} = 8 \rightarrow (-7) \cdot 6 = -42$$

$$x_3 \text{ enter: } \frac{30}{5} = 6; \frac{1}{1} = 1 \rightarrow (-6) \cdot 1 = -6$$

$$x_4 \text{ enter: } \frac{30}{1} = 30; \frac{16}{1} = 16 \rightarrow (-2) \cdot 16 = -32$$

很明显三个选择中, x_2 进入时 w 降低最多。因此我们的 pivoting position 是

(x_2 enters, x_5 leaves)

ii. 做 pivoting

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_2	-2	1	1	1/5	1/5	0	0	6
x_6	1	0	1	0	0	1	0	1
x_7	4	0	-2	3/5	-2/5	0	1	4
w	-5	0	1	-3/5	7/5	0	0	w-5

b. Pivoting 2

i. 对比哪个 pivoting column 最好:

$$x_1 \text{ enter: } \frac{1}{1} = 1; \frac{4}{4} = 1 \rightarrow (-5) \cdot 1 = -5$$

$$x_4 \text{ enter: } \frac{6}{1/5} = 30; \frac{4}{3/5} = \frac{20}{3} \rightarrow \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{20}{3} = -4$$

很明显两个选择中, x_1 进入时 w 降低最多。不过这里出现 tie, 我们随机选择一个 pivoting position 是

(x_1 enters, x_6 leaves)

ii. 做 pivoting

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_2	0	1	3	1/5	1/5	2	0	8
x_1	1	0	1	0	0	1	0	1
x_7	0	0	-6	3/5	-2/5	-4	1	0
w	0	0	6	-3/5	7/5	5	0	w

- c. 这个时候我们获得 $w_{min} = 0$ ，但是还有 artificial variable 在 basis 里。这个时候 basis 是

$$\{x_2, x_1, x_7\}$$

我们的 BFS 是

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\} = \{1, 8, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

现在出现了本节的关键问题： x_7 仍然是 basic variable，而 x_7 是 artificial variable。所以我们还不能直接进入 Phase 2。

14. Step 3: New Technique。我们选择一个新的 pivoting position。这一步不是普通 simplex algorithm 的 objective-improving pivot。因为 w 已经等于 0 了，不需要再降低 w 。这一步只是为了把 artificial variable 清理出 basis。选择标准是

- 我们找到 problematic row (也就是 $w_{min} = 0$ 后，artificial variable 的那一个 row；也就是 degenerate basic variable 对应的 row)：在这里是 x_7 row。
- 对于这一行，我们不看 artificial variable 列，我们只看原列。在原列里面，随机找一个非 0 的 entry 做 pivoting：在这里可以选择

$$(\text{row } x_7, \text{col } x_3) = -6 / (\text{row } x_7, \text{col } x_4) = \frac{3}{5}$$

这两个中任意一个做 pivoting position。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_2	0	1	0	1/2	0	0	1/2	8
x_1	1	0	0	1/10	-1/15	1/3	1/6	1
x_3	0	0	1	-1/10	1/15	2/3	-1/6	0
w	0	0	0	0	1	1	1	w

可以得到新的目标函数后，进入 Phase 2。

15. 重点细节：在标准 Phase 1 设置下，这个还留在 basis 里的 artificial variable 一定是 degenerate basic variable。因为 Phase 1 的 auxiliary objective 是

$$w = x_{a_1} + x_{a_2} + \cdots + x_{a_k},$$

其中所有 artificial variables 都满足 $x_{a_i} \geq 0$ 。如果 Phase 1 结束时 $w_{min} = 0$ ，那么因为每个 artificial variable 都是非负的，所以唯一可能是

$$x_{a_1} = x_{a_2} = \cdots = x_{a_k} = 0.$$